NUMERIKUS SOROZATOK *folytatás* (vázlatos bizonyításokkal)

19. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{r^k}{k!}=e^r,\quad r\in\mathbf{Q}^+}$ **I.** $n\ge 2\ \Rightarrow\ \left(1+\frac{r}{n}\right)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{r}{n}\right)^k=1+r+\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k}\cdot\frac{r^k}{k!}=$

$=1+r+\sum\limits_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\frac{r^k}{k!}<\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{r^k}{k!}$ **II.** Ha $M\ge 2$ egész, akkor minden $n>M$ esetén:

$(1+\frac{r}{n})^n=1+r+\sum\limits_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\frac{r^k}{k!}>1+r+\sum\limits_{k=2}^{M}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\frac{r^k}{k!}$, melyből

$(n\to+\infty)$ $e^r\ge\sum\limits_{k=0}^{M}\frac{r^k}{k!}$ következik. **I.** és **II.** szerint tehát ha $n>2$**:** $(1+\frac{r}{n})^n<\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{r^k}{k!}\le e^r$, így $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{r^k}{k!}\to e^r$.

20. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=A,\quad(a_n\in\Re^+)}$ $\boxed{\Rightarrow}$ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=A}$ Fordítva már nem igaz, pl.: $a_n:=\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$ (n ptl.), $\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$ (n ps.)

$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{1}{k^{\sqrt{n}}}}=\frac{1}{k^{1/\sqrt{n}}}\to 1$ ($k=2$ v. 3), de $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^{\sqrt{n}}}{3^{\sqrt{n+1}}}<\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{n}}\le\left(\frac{2}{3}\right)^{[\sqrt{n}]}\to 0$ miatt $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to 0$ (n ptl.),

és (ha n páros:) $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n+1}}}>\frac{3^{\sqrt{n}}}{2^{1+\sqrt{n}}}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\sqrt{n}}\ge\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{[\sqrt{n}]}\to+\infty$ miatt $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to+\infty$.

I. $A\in\Re^+$: $\varepsilon\in\Re^+$ $(\varepsilon<A)$ $\exists M\in\mathbf{N}$ $n\ge M\Rightarrow A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{a_{n+1}}{a_n}<A+\frac{\varepsilon}{2}$, így $\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot...\cdot\frac{a_{M+1}}{a_M}\cdot a_M}$ $(n>M)$

miatt $\sqrt[n]{(A-\frac{\varepsilon}{2})^{n-M}\cdot a_M}<\sqrt[n]{a_n}<\sqrt[n]{(A+\frac{\varepsilon}{2})^{n-M}\cdot a_M}$, azaz $(A-\frac{\varepsilon}{2})\cdot\sqrt[n]{\frac{a_M}{(A-\frac{\varepsilon}{2})^M}}<\sqrt[n]{a_n}<(A+\frac{\varepsilon}{2})\cdot\sqrt[n]{\frac{a_M}{(A+\frac{\varepsilon}{2})^M}}$,

melyből ($\sqrt[n]{const.}\to 1$ miatt) $A-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}<A+\varepsilon$ teljesül valamely küszöbindextől kezdődő n –ekre.

II. $A=+\infty$: $\varepsilon\in\Re^+$ $\exists M\in\mathbf{N}$ $n\ge M\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}>\frac{2}{\varepsilon}$, így $\sqrt[n]{a_n}>\sqrt[n]{(\frac{2}{\varepsilon})^{n-M}\cdot a_M}=\frac{2}{\varepsilon}\cdot\sqrt[n]{(\frac{\varepsilon}{2})^M\cdot a_M}$ $(n>M)$,

melyből $\sqrt[n]{(\frac{\varepsilon}{2})^M\cdot a_M}\to 1$ miatt $\sqrt[n]{a_n}>\frac{1}{\varepsilon}$ teljesül valamely küszöbindextől kezdődő n –ekre.

III. $A=0$: A $b_n:=\frac{1}{a_n}$ sorozatra **II.** szerint $\sqrt[n]{b_n}\to+\infty$, így a reciprok sorozatra $\sqrt[n]{a_n}\to 0$.

21. **Példa** (13. és 20. alkalmazására) **:** $\boxed{a_n:=\frac{n!}{(3n)!}\cdot n^{2n}}$

I. megoldás: $\sqrt[n]{a_n}=\frac{\sqrt[n]{n!}\cdot n^2}{\sqrt[n]{(3n)!}}=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\cdot\left(\frac{3n}{\sqrt[3n]{(3n)!}}\right)^3\cdot\frac{n\cdot n^2}{27n^3}\to\frac{1}{e}\cdot e^3\cdot\frac{1}{27}=\frac{e^2}{27}<1\Rightarrow\boxed{a_n=(\sqrt[n]{a_n})^n}\to 0.$

II. megoldás: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!}{(3(n+1))!}\cdot(n+1)^{2(n+1)}\cdot\frac{(3n)!}{n!}\cdot\frac{1}{n^{2n}}=\frac{(n+1)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}\cdot(n+1)^2\to\frac{e^2}{27}$

(20. szerint) $\Rightarrow\sqrt[n]{a_n}\to\frac{e^2}{27}<1\Rightarrow\boxed{a_n=(\sqrt[n]{a_n})^n}\to 0.$

22. **Példa** (4. és 14. alkalm.) **:** $\boxed{a_n:=\sqrt[n]{c_mn^m+c_{m-1}n^{m-1}+...+c_2n^2+c_1n+c_0}\qquad m\in\mathbf{N},\ c_k\in\Re\ \ k=0,1,...,m,\ \ c_m>0}$

$a_n=\sqrt[n]{n^m}\cdot\sqrt[n]{c_m+\frac{c_{m-1}}{n}+...+\frac{c_2}{n^{m-2}}+\frac{c_1}{n^{m-1}}+\frac{c_0}{n^m}}\longrightarrow 1^m\cdot 1=1$ (a gyök alatti összeg $\to c_m>0$!)

REKURZÍV MÓDON MEGADOTT SOROZATOK:

23. $\boxed{a_1 := c > 0, \quad a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right) \quad n \in \mathbf{N}, \quad A > 0}$

I. $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{A}{a_n}} = \sqrt{A} \Rightarrow$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{A}{a_n^2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{A}{A}\right) = 1 \Rightarrow \boxed{a_{n+1} \leq a_n}$ ha $n \geq 2$, azaz a sorozat **mon.fogyó** a 2. tagtól kezdődően,

és **alulról korlátos** ($\sqrt{A}$ alsó korlát), $\Rightarrow$ **konvergens**, azaz **létezik** a valós $\boldsymbol{a} := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ **határték** (> 0).

II. A határérték az $\boldsymbol{a} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$ (a részsorozatok határértéke is $\boldsymbol{a}$), valamint a rekurziós képlet szerinti

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n + \frac{A}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}\right)$ egyenlőségekből: $\boxed{a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right)} \Rightarrow \boldsymbol{a} = \sqrt{A}$.

24. $\boxed{a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \frac{1}{k}\left((k-1)a_n + \frac{A}{a_n^{k-1}}\right) \quad n \in \mathbf{N}, \quad A > 0, \ k \geq 2}$ (Az első tag tetszőleges poz. szám is lehet !)

I. $a_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)a_n + \frac{A}{a_n^{k-1}}\right) \geq \sqrt[k]{a_n^{k-1} \cdot \frac{A}{a_n^{k-1}}} = \sqrt[k]{A} \Rightarrow$ a sorozat **alulról korlátos** ($\sqrt[k]{A}$ a.k. a 2.tagtól),

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{k}\left((k-1) + \frac{A}{a_n^k}\right) \leq \frac{1}{k}\left((k-1) + \frac{A}{A}\right) = 1 \Rightarrow \boxed{a_{n+1} \leq a_n}$ ha $n \geq 2$ **(mon.f.)**, $\Rightarrow \exists\ \boldsymbol{a} := \lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0.$

II. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{k}\left((k-1)a_n + \frac{A}{a_n^{k-1}}\right) \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{k}\left((k-1)a + \frac{A}{a^{k-1}}\right)} \Rightarrow \boldsymbol{a} = \sqrt[k]{A}$.

25. $\boxed{a_1 := \sqrt{A}, \quad a_{n+1} := \sqrt{A + a_n}, \quad A \geq 1}$ **I. Konvergens**, u.i. **A.)** a sorozat szig.mon.növő, azaz $\forall n \in \mathbf{N} \ a_{n+1} > a_n$:

1. $n = 1$: $a_2 = \sqrt{A + \sqrt{A}} > \sqrt{A} = a_1$; **2.** T.f.h. n –re igaz: $a_{n+1} > a_n \Rightarrow \sqrt{A + a_{n+1}} > \sqrt{A + a_n} \Rightarrow \boxed{a_{n+2} > a_{n+1}}$

B.) a sorozat felülről korlátos: **1.** $a_1 < 2A$; **2.** T.f.h. n –re igaz: $a_n < 2A \Rightarrow \sqrt{A + a_n} < \sqrt{3A} \Rightarrow \boxed{a_{n+1} < \sqrt{3A} < 2A}$

II. Hat.ért.: $\boldsymbol{a} := \lim\limits_{n\to\infty} a_n \Rightarrow \boxed{a = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{A + a_n} = \sqrt{A + \lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{A + a}} \Rightarrow a^2 = A + a \Rightarrow a = \frac{1 + \sqrt{1 + 4A}}{2}$.

26. $\boxed{a_1 := \sqrt{A}, \quad a_{n+1} := \sqrt{A \cdot a_n}, \quad 0 < A < 1}$ **I. Konvergens**, u.i. **A.)** a sorozat szig.mon.fogyó, azaz $\forall n \in \mathbf{N} \ a_{n+1} < a_n$:

1. $n = 1$: $a_2 = \sqrt{A\sqrt{A}} < \sqrt{A} = a_1$; **2.** T.f.h. n –re igaz: $a_{n+1} < a_n \Rightarrow \sqrt{A \cdot a_{n+1}} < \sqrt{A \cdot a_n} \Rightarrow \boxed{a_{n+2} < a_{n+1}}$

B.) a sorozat alulról korlátos: **1.** $a_1 > A$; **2.** T.f.h. n –re igaz: $a_n > A \Rightarrow \sqrt{A \cdot a_n} > \sqrt{A \cdot A} \Rightarrow \boxed{a_{n+1} > A}$

II. Hat.ért.: $\boldsymbol{a} := \lim\limits_{n\to\infty} a_n \Rightarrow \boxed{a = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{A \cdot a_n} = \sqrt{A \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{A \cdot a}} \Rightarrow a^2 = A \cdot a \Rightarrow \boldsymbol{a} = A$.

27. $\boxed{a_1 := 9, \quad a_{n+1} := (a_n - 3)^2}$ **I.** A sorozat **szig.mon.növő** (és tagjai 6 -nál nagyobbak), azaz $\forall n \in \mathbf{N} \ a_{n+1} > a_n > 6$:

1. $n = 1$: $a_2 = 36 > 9 = a_1 > 6$; **2.** T.f.h. n –re igaz: $a_{n+1} > a_n > 6 \Rightarrow (a_{n+1} - 3)^2 > (a_n - 3)^2 > 9 \Rightarrow \boxed{a_{n+2} > a_{n+1} > 6}$

II. Ha az $\boldsymbol{a} := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ **határérték** véges (valós szám) lenne, akkor $\boxed{a = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n - 3)^2 = (a-3)^2}$ miatt $a =$

$\frac{7 + \sqrt{13}}{2}$ vagy $\frac{7 - \sqrt{13}}{2}$ lenne. Ezek 6 -nál kisebb számok, így egyik sem lehet $\{a_n\}$ felső határa $\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty}$.

2003.09.16