EGÉSZ KITEVŐJŰ HATVÁNYOK

I. Definíció (poz. egész kitevőjű hatvány) **:** $a \in \mathbf{R}$, $a^1 := a$, $\forall n \in \mathbf{N}$ $a^{n+1} := a^n \cdot a$.

1. Állítás: $a \in \mathbf{R}$ $m,n \in \mathbf{N}$, $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.

Bizonyítás: (rögzített m mellett n-re vonatkozó teljes indukcióval) 1.) $a^{m+1} = a^m \cdot a = a^m \cdot a^1$, 2.) T.f.h. $a^{m+(n-1)} = a^m \cdot a^{n-1}$

$\Rightarrow$ $a^{m+n} = a^{(m+(n-1))+1} = a^{m+(n-1)} \cdot a = (a^m \cdot a^{n-1}) \cdot a = a^m \cdot (a^{n-1} \cdot a) = a^m \cdot a^n$. ☻

2. Állítás: $a \in \mathbf{R}$ $m,n \in \mathbf{N}$, $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Bizonyítás: (rögzített m mellett telj.ind. n-re) 1.) $(a^m)^1 = a^m = a^{m \cdot 1}$, 2.) T.f.h. $(a^m)^{n-1} = a^{m \cdot (n-1)}$

$\Rightarrow$ $(a^m)^n = (a^m)^{(n-1)+1} = (a^m)^{n-1} \cdot a^m = a^{m \cdot (n-1)} \cdot a^m = a^{m \cdot (n-1)+m} = a^{m \cdot n}$. ☻

3. Állítás: $a,b \in \mathbf{R}$ $n \in \mathbf{N}$, $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

Bizonyítás: (telj.ind.) 1.) $(a \cdot b)^1 = a \cdot b = a^1 \cdot b^1$, 2.) T.f.h. $(a \cdot b)^{n-1} = a^{n-1} \cdot b^{n-1}$

$\Rightarrow$ $(a \cdot b)^n = (a \cdot b)^{(n-1)+1} = (a \cdot b)^{n-1} \cdot (a \cdot b) = (a^{n-1} \cdot b^{n-1}) \cdot (a \cdot b) = (a^{n-1} \cdot a) \cdot (b^{n-1} \cdot b) = a^n \cdot b^n$. ☻

II. Definíció (nulla kitevőjű hatvány) **:** $a \in \mathbf{R}$, $a^0 := 1$.

1. Állítás: $a \in \mathbf{R}$ $n \in \mathbf{N}_0$, $a^{n+0} = a^n \cdot a^0$.

Bizonyítás: $a^{n+0} = a^n = a^n \cdot 1 = a^n \cdot a^0$. ☻

2. Állítás: $a \in \mathbf{R}$ $n \in \mathbf{N}_0$, $(a^n)^0 = a^{n \cdot 0}$, $(a^0)^n = a^{0 \cdot n}$.

Bizonyítás: $(a^n)^0 = 1 = a^0 = a^{n \cdot 0}$,

$(a^0)^n = 1^n = 1 = a^0 = a^{0 \cdot n}$. ☻

3. Állítás: $a,b \in \mathbf{R}$, $(a \cdot b)^0 = a^0 \cdot b^0$.

Bizonyítás: $(a \cdot b)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 \cdot b^0$. ☻

III. Definíció (negatív egész kitevőjű hatvány) **:** $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ $n \in \mathbf{N}$, $a^{-n} := \dfrac{1}{a^n}$.

1. Állítás: $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ $m,n \in \mathbf{Z}$, $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.

Bizonyítás: Legyen $m \in \mathbf{N}_0$, $n \in \mathbf{N}$. Az I. és II. alatt bizonyított eseteken túl még az alábbi eseteket kell bizonyítanunk:

1.) $m + (-n) \ge 0$: $a^{m+(-n)} = a^{m-n} \cdot \left(a^n \cdot \dfrac{1}{a^n} \right) = a^m \cdot \dfrac{1}{a^n} = a^m \cdot a^{-n}$, 2.) $m + (-n) < 0$: $a^{m+(-n)} = a^{-(n-m)} = \dfrac{1}{a^{n-m}} =$

$= \dfrac{1}{a^n \cdot a^{-m}} = \dfrac{1}{a^n} \cdot \dfrac{1}{a^{-m}} = \dfrac{1}{\frac{1}{a^m}} \cdot \dfrac{1}{a^n} = a^m \cdot a^{-n}$, 3.) $a^{(-m)+(-n)} = a^{-(m+n)} = \dfrac{1}{a^{m+n}} == \dfrac{1}{a^m \cdot a^n} = \dfrac{1}{a^m} \cdot \dfrac{1}{a^n} = a^{-m} \cdot a^{-n}$. ☻

2. Állítás: $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ $m,n \in \mathbf{Z}$, $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Bizonyítás: Legyen $m \in \mathbf{N}_0$, $n \in \mathbf{N}$. 1.) $(a^m)^{-n} = \dfrac{1}{(a^m)^n} = \dfrac{1}{a^{m \cdot n}} = a^{-(m \cdot n)} = a^{m \cdot (-n)}$, 2.) $(a^{-n})^m = \left(\dfrac{1}{a^n} \right)^m = \dfrac{1}{(a^n)^m} =$

$= \dfrac{1}{a^{n \cdot m}} = a^{-(n \cdot m)} = a^{(-n) \cdot m}$, 3.) $(a^{-m})^{-n} = \dfrac{1}{(a^{-m})^n} = \dfrac{1}{a^{(-m) \cdot n}} = \dfrac{1}{a^{-(m \cdot n)}} = a^{m \cdot n} = a^{(-m) \cdot (-n)}$. ☻

3. Állítás: $a,b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ $n \in \mathbf{Z}$, $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

Bizonyítás: Nemnegatív kitevőre már bizonyított. Ha $n \in \mathbf{N}$, $(a \cdot b)^{-n} = \dfrac{1}{(a \cdot b)^n} = \dfrac{1}{a^n \cdot b^n} = \dfrac{1}{a^n} \cdot \dfrac{1}{b^n} = a^{-n} \cdot b^{-n}$. ☻

RACIONÁLIS KITEVŐJŰ HATVÁNYOK

TÉTEL : $\forall a \in \mathbf{R}^+ \quad \forall q \in \mathbf{N} \quad \exists!$ (egyértelműen létezik) $b \in \mathbf{R}^+ \quad b^q = a$. **Jelölés:** $\sqrt[q]{a} := b$. **Biz.:** ld. e.a.

Állítás: $\forall a \in \mathbf{R}^+ \quad \forall p \in \mathbf{Z} \quad \forall q \in \mathbf{N} \qquad \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$.

Bizonyítás: $\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^q = a^p = \left(\left(\sqrt[q]{a}\right)^q\right)^p = \left(\sqrt[q]{a}\right)^{q\cdot p} = = \left(\left(\sqrt[q]{a}\right)^p\right)^q \Rightarrow$ (q –dik gyök egyértelmű !) $\sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$. ☺

Állítás: Ha $a \in \mathbf{R}^+$, $p, p_1 \in \mathbf{Z}$, $q, q_1 \in \mathbf{N}$ és $\dfrac{p}{q} = \dfrac{p_1}{q_1}$, akkor $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q_1]{a^{p_1}}$.

Bizonyítás: $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[q_1]{a^p}\right)^{q_1}} = \sqrt[q]{\sqrt[q_1]{\left(a^p\right)^{q_1}}} = \sqrt[q]{\sqrt[q_1]{a^{p\cdot q_1}}} = \sqrt[q]{\sqrt[q_1]{a^{p_1\cdot q}}} = \sqrt[q]{\sqrt[q_1]{\left(a^{p_1}\right)^q}} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[q_1]{a^{p_1}}\right)^q} = \sqrt[q_1]{a^{p_1}}$. ☺

IV. Definíció (racionális kitevőjű hatvány) **:** $a \in \mathbf{R}^+ \quad r \in \mathbf{Q}, \quad a^r := \sqrt[q]{a^p}$, ahol $p \in \mathbf{Z},\ q \in \mathbf{N}$, $r = \dfrac{p}{q}$.

1. Állítás: $a \in \mathbf{R}^+ \quad r, s \in \mathbf{Q}, \quad a^{r+s} = a^r \cdot a^s$.

Bizonyítás: $r := \dfrac{p}{q}, \quad s := \dfrac{t}{u}, \quad p, t \in \mathbf{Z}, \ q, u \in \mathbf{N}$. $\qquad a^{r+s} = a^{\frac{p}{q}+\frac{t}{u}} = a^{\frac{p\cdot u + t\cdot q}{q\cdot u}} = \sqrt[q\cdot u]{a^{p\cdot u + t\cdot q}} = \sqrt[q\cdot u]{(a^p)^u \cdot (a^t)^q} =$

$= \sqrt[q\cdot u]{\left(\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^q\right)^u \cdot \left(\left(\sqrt[u]{a^t}\right)^u\right)^q} = \sqrt[q\cdot u]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^{q\cdot u} \cdot \left(\sqrt[u]{a^t}\right)^{u\cdot q}} = \sqrt[q\cdot u]{\left(\sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[u]{a^t}\right)^{q\cdot u}} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[u]{a^t} = a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{t}{u}} = a^r \cdot a^s$. ☺

2. Állítás: $a \in \mathbf{R}^+ \quad r, s \in \mathbf{Q}, \quad (a^r)^s = a^{r\cdot s}$.

Biz.: $\left(a^r\right)^s = (a^{\frac{p}{q}})^{\frac{t}{u}} = (a^{\frac{p}{q}})^{\frac{q\cdot t}{q\cdot u}} = \sqrt[q\cdot u]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^{q\cdot t}} = \sqrt[q\cdot u]{\left(\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^q\right)^t} = \sqrt[q\cdot u]{\left(a^p\right)^t} = \sqrt[q\cdot u]{a^{p\cdot t}} = a^{\frac{p\cdot t}{q\cdot u}} = a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{t}{u}} = a^{r\cdot s}$. ☺

3. Állítás: $a, b \in \mathbf{R}^+ \quad r \in \mathbf{Q}, \quad (a\cdot b)^r = a^r \cdot b^r$.

Bizonyítás: $(a\cdot b)^r = (a\cdot b)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a\cdot b)^p} = \sqrt[q]{a^p \cdot b^p} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^q \cdot \left(\sqrt[q]{b^p}\right)^q} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[q]{a^p}\cdot\sqrt[q]{b^p}\right)^q} =$

$= \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[q]{b^p} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}} = a^r \cdot b^r$. ☺

RACIONÁLIS SZÁMOK HALMAZÁN ÉRTELMEZETT EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNYEK

Definíció : $c \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\} \quad f : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}^+ \quad f(r) := c^r$ a $\mathbf{Q}$ -n értelmezett c alapú exponenciális függvény. **Jelölés:** $\exp_c^{\mathbf{Q}}$.

Állítás: $\exp_c^{\mathbf{Q}}$ **szigorúan monoton növő** függvény, ha $c > 1$, és **szigorúan monoton fogyó**, ha $c < 1$.

Bizonyítás: Ha $c > 1$: $\dfrac{p}{q} < \dfrac{t}{u} \Rightarrow t\cdot q - p\cdot u > 0$, $1 < c \Rightarrow 1 < c^{t\cdot q - p\cdot u} \Rightarrow c^{p\cdot u} < c^{t\cdot q} \Rightarrow c^{\frac{p}{q}} < c^{\frac{t}{u}}$;

Ha $c < 1$: $r < s \Rightarrow \left(\dfrac{1}{c}\right)^r < \left(\dfrac{1}{c}\right)^s \Rightarrow \dfrac{1}{c^r} < \dfrac{1}{c^s} \Rightarrow c^s < c^r$. ☺