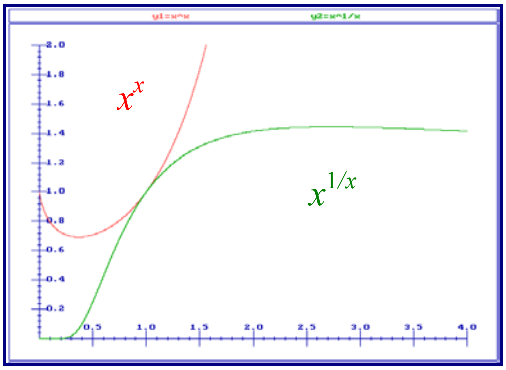
NEVEZETES FÜGGVÉNYHATÁRÉRTÉKEK

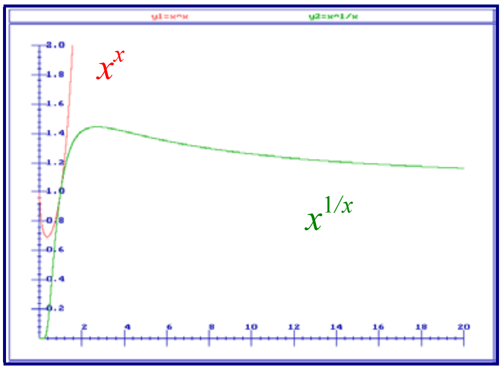
1. $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}=1}$ **Bizonyítás:** $\sqrt[n]{n+1}\to 1 \quad\Rightarrow\quad \varepsilon\in\mathbf{R}^+\ \ \exists M\in\mathbf{N}\quad \forall x>M$ (emiatt $[x]\ge M$)

$$1-\varepsilon<1\le [x]^{1/([x]+1)}\le [x]^{1/x}\le x^{1/x}<([x]+1)^{1/x}\le([x]+1)^{1/[x]}<1+\varepsilon\ ,\qquad \delta:=\frac{1}{M}\ .$$

2. $\boxed{\lim\limits_{x\to+0} x^{x}=1}$ **Bizonyítás:** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}=1 \ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1/x^{1/x}=1 \ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to+\infty}(1/x)^{1/x}=1$ (külső fv.),

$\lim\limits_{x\to+0} 1/x=+\infty$ (belső fv.) $\Rightarrow$ (kompozíció hat.ért. II.) $\lim\limits_{x\to+0} x^{x}=1$.





3. $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathbf{e}}$ **Bizonyítás:** $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\to\mathbf{e}\ ,\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\to\mathbf{e}\quad\Rightarrow\quad \varepsilon\in\mathbf{R}^+\ \ \exists M\in\mathbf{N}$

$$\forall x>M\qquad \mathbf{e}-\varepsilon<\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}\le\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{x}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\le\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{x}<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}<\mathbf{e}+\varepsilon\ ,\qquad \delta:=\frac{1}{M}\ .$$

4. $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathbf{e}}$ **Bizonyítás:** $\lim\limits_{x\to-\infty} -x=+\infty$ (belső fv.) és **3.** (külső fv.) $\Rightarrow\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}=\mathbf{e}\ \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\frac{x}{x+1}}\right)^{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{-x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{-(x+1)}\cdot\left(1-\frac{1}{x+1}\right)=\mathbf{e}\cdot 1=\mathbf{e}\ .$$

5. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\mathbf{e}}$ **Bizonyítás:** **I.** $\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{x}=+\infty$ (belső fv.) és **3.** (külső fv.) $\Rightarrow\ \lim\limits_{x\to+0}\left(1+\frac{1}{1/x}\right)^{1/x}=\mathbf{e}\ \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to+0}(1+x)^{1/x}=\mathbf{e}$, **II.** $\lim\limits_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty$ (belső fv.) és **4.** (külső fv.) $\Rightarrow\ \lim\limits_{x\to-0}\left(1+\frac{1}{1/x}\right)^{1/x}=\lim\limits_{x\to-0}(1+x)^{1/x}=\mathbf{e}$.