2. Gyakorlat : (2003. szept.22. hétfő, szept.24. szerda)

4. Van-e olyan $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ differenciálható függvény, melyre $\lim\limits_{-\infty} f=+\infty$ és $\lim\limits_{-\infty} f'=1$?

Nem létezik ilyen függvény, u.i. :

$\lim\limits_{-\infty} f'=1 \;\Rightarrow\;$ Minden 1-nél nem nagyobb pozitív ε számhoz $\exists\,\delta>0\;\forall x\in(-\infty,-\frac{1}{\delta})\;\; f'(x)\in B(1,\varepsilon)\subset\mathbf{R}^+$, így pl. $\varepsilon:=\frac{1}{2}$

$\exists\,\delta>0\;\;\forall x\in(-\infty,-\frac{1}{\delta})\;\; f'(x)>\frac{1}{2}>0 \;\Rightarrow\; f$ szig. mon. nő a $(-\infty,-\frac{1}{\delta})$ intervallumon $\Rightarrow\;\exists\lim\limits_{-\infty} f=\inf R(f)\neq +\infty$!!!

5. Van-e olyan valós függvény, melynek deriváltfüggvénye az egészrész függvény ?

Nem létezik olyan differenciálható f függvény, melynek deriváltfüggvénye az egészrész függvény, hiszen az egészrész függvénynek az egész helyeken elsőfajú szakadása van, tehát nem Darboux tulajdonságú függvény, f' viszont igen (Darboux tétel).

6. Bizonyítsuk be, hogy ha az f differenciálható függvény deriváltfüggvénye korlátos valamely $I\subset D(f)$ intervallumon, akkor f az I intervallumon egyenletesen folytonos !

Igaz-e, hogy ha f az I intervallumon egyenletesen folytonos, akkor deriváltfüggvénye korlátos az I intervallumon ?

$\exists\,K\in\mathbf{R}^+\;\;\forall x\in I\;\;|f'(x)|\le K \;\Rightarrow\; \forall x,y\in I\;\;\exists\,\xi$ az x és y között, melyre $|f(x)-f(y)|=|f'(\xi)\cdot(x-y)|\le K\cdot|x-y|$,

tehát ha $\varepsilon>0$ és $|x-y|<\frac{\varepsilon}{K}$, akkor $|f(x)-f(y)|\le K\cdot|x-y|<\varepsilon$, tehát pl. $\delta:=\frac{\varepsilon}{K}$ teljesíti az ε-hoz létező def.-t.

f' korlátossága nem szükséges feltétele az egyenletes folytonosságnak, példa erre a négyzetgyök függvény, amely Heine tétele szerint az értelmezési tartományának bármely korlátos és zárt intervallumán egyenletesen folytonos, így pl. egyenletesen folytonos az $I=(0,1)\subset[0,1]$ intervallumon is, melyen azonban a deriváltja nem korlátos, hiszen $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2\sqrt{x}}=+\infty$!!!

3. Gyakorlat : (2003. szept.29. hétfő, okt.1. szerda)

1. Irjuk fel az f függvény 0 helyhez tartozó 5 -dik Taylor polinomját, ha a hozzárendelés :

A. $f(x):=\cos^2 x$, B. $f(x):=\mathrm{e}^{x^2}$, C. $f(x):=\ln(1+x^2)$, D. $f(x):=\sqrt{1-x}$, E. $f(x):=\arcsin x$!

A. $f^{(n)}(x)=(-1)^{k+1}\cdot 2^{n-1}\cdot\sin 2x$, ha $n=2k+1,\; k\in\mathbf{N}_0$, $\quad f^{(n)}(x)=(-1)^{k}\cdot 2^{n-1}\cdot\cos 2x$, ha $n=2k,\; k\in\mathbf{N}$, így a deriváltak 0 helyen vett értékeit felhasználva kapjuk, hogy $T_{0,5}^{\cos^2}(x)=1-\frac{2}{2!}\cdot x^2+\frac{8}{4!}\cdot x^4=1-x^2+\frac{1}{3}\cdot x^4$.

Megj.: Felhasználva, hogy $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}\cdot(1+\cos 2x)$, továbbá mivel $\forall x\in\mathbf{R}\;\;\cos x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot x^{2n}$,

így is okoskodhattunk volna : $\forall x\in\mathbf{R}\;\;\cos^2 x=1+\dfrac{1}{2}\cdot\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot(2x)^{2n}$, ez tehát f Taylor sora, melyből a Taylor polinomok közvetlenül adódnak: $\forall n\in\mathbf{N}_0\;\; T_{0,2n}^{\cos^2}(x)=1+\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\cdot\dfrac{2^{2k-1}}{(2k)!}\cdot x^{2k}$ és $T_{0,2n+1}^{\cos^2}(x)=T_{0,2n}^{\cos^2}(x)$.

B. Egyszerűbb, ha a deriváltak meghatározása helyett az exp függvény 0 középpontú Taylor sorát használjuk fel :

$\forall x\in\mathbf{R}\;\;\mathrm{e}^x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n!}\cdot x^n$, így $\forall x\in\mathbf{R}\;\;\mathrm{e}^{x^2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n!}\cdot(x^2)^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n!}\cdot x^{2n}$, ez tehát f 0 középpontú Taylor sora,

melyből a Taylor polinomok közvetlenül adódnak: $\forall n\in\mathbf{N}_0\;\; T_{0,2n}^{\exp^2}(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}\cdot x^{2k}$ és $T_{0,2n+1}^{\exp^2}(x)=T_{0,2n}^{\exp^2}(x)$.

C. Először az f' függvény Taylor sorát vizsgáljuk : A geometriai sorok összegét felhasználva $\forall x\in(-1,1)$

$f'(x)=2x\cdot\dfrac{1}{1+x^2}=2x\cdot\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot 2\cdot x^{2n+1}$, melyből a hatv.sorok összegfv.-ének diff.hatósága szerint $\forall x\in(-1,1)$

$f(x)=const+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot 2\cdot\frac{1}{2n+2}\cdot x^{2n+2}$. Ebből $f(0)=0$ miatt $const=0$, így $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\cdot x^{2(n+1)}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot x^{2n}$,

ez tehát f Taylor sora, melyből a Taylor polinomok : $\forall n\in\mathbf{N}\;\; T_{0,2n}^{f}(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\cdot x^{2k}$ és $T_{0,2n+1}^{f}(x)=T_{0,2n}(x)$.

Vegyük észre, hogy $D(f) = \mathbf{R}$, a 0 középpontú Taylor sorának konvergenciasugara pedig 1 (felhasználva, hogy a hatványsor és deriváltsorának konvergenciasugara megegyezik). Figyelembe véve, hogy f Taylor sora az 1 és -1 helyeken is konvergens (Leibniz tétel)), továbbá mivel a hatványsor összegfüggvénye folytonos (Abel tétel), az 1 és -1 helyeken az összegfüggvény helyettesítési értékei az f (folytonos függvény) által felvett értékekkel egyeznek. Az f függvényt tehát a 0 középpontú Taylor sora a $[-1, 1]$ intervallumban előállítja, azaz $\forall x \in [-1, 1]$ $\ln(1+x^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^{2n}$ (a többi helyen a Taylor sor divergens).

D. $f(x) := \sqrt{1-x} \Rightarrow D(f) = (-\infty, 1]$, $\forall x \in (-\infty, 1)$ akárhányszor differenciálható, $f'(x) = -\frac{1}{2\cdot\sqrt{1-x}}$, $f''(x) = -\frac{1}{2^2\cdot\sqrt{(1-x)^3}}$,

$n \geq 3$ esetén a deriváltak: $f^{(n)}(x) = -\frac{(2n-3)!!}{2^n} \cdot (1-x)^{-\frac{2n-1}{2}} = -\frac{(2n-3)!!}{2^n \cdot \sqrt{(1-x)^{2n-1}}}$ (ez egyébként $n = 1, 2$ -re is fennáll, **def.:** $(-1)!! := 1$),

melyből a deriváltak 0 helyen vett értékeit felhasználva f 0 középpontú Taylor sora az $1 - \sum_{(1)} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \cdot x^n$ hatványsor .

A Taylor polinomok ebből könnyen meghatározhatók, pl. az ötödik : $T_{0,5}(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{8} \cdot x^2 - \frac{1}{16} \cdot x^3 - \frac{5}{128} \cdot x^4 - \frac{7}{256} \cdot x^5$.

Vegyük észre, hogy a fenti hatványsor konvergenciasugara a hányados kritérium alapján 1, hiszen $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2n-1}{2n+2} \cdot |x| \to |x|$.

Megj.: A binomiális tétel ismeretében (*ld. 5. Emlékeztető*) egyszerűbben is megkaphattuk volna a fentieket, nevezetesen:

Ha $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}_0$, akkor $\forall x \in I$, $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n$, ahol $(-1, 1) \subset I \subset [-1, 1]$ a binomiális sor konvergenciaintervalluma,

(ha α nemnegatív egész, akkor a binomiális sor véges összeg, s az egyenlőség minden valós x -re teljesül ! (*ld. I.évf. I.félév*))

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$ és $n \geq 1$ -re a binomiális együtthatók: $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} = (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2^n \cdot n!} = (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$, így

ha $x \in (-1, 1)$, s emiatt $-x \in (-1,1)$, akkor $\sqrt{1-x} = (1+(-x))^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \cdot (-x)^n = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \cdot x^n$,

ez tehát a függvény 0 középpontú Taylor sora. (Az $x = -1$ és $x = 1$ helyeken a konvergencia természetesen külön vizsgálandó.)

E. $f'(x) = \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ miatt először f' Taylor sorát vizsgáljuk, a binomiális tétel alkalmazásával : $\forall x \in (-1, 1)$

$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n \Rightarrow$ $\forall x \in (-1, 1)$ $-x^2 \in (-1, 1)$ miatt $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot (-x^2)^n =$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot x^{2n}$, * melyből $\forall x \in (-1, 1)$ $f(x) = c + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!} \cdot x^{2n+1}$ (u.i. a * hatv.sor ez utóbbi hatványsornak a deriváltsora). Ebből $f(0) = 0$ miatt $c = 0$, így $\forall x \in (-1, 1)$ $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!} \cdot x^{2n+1}$. (Bizonyítható, hogy $x = \pm 1$ -re is fennáll.) Ez tehát f 0 középpontú Taylor sora, melyből a 0 középpontú Taylor polinomok már közvetlenül leolvashatók.

2. Kizárólag csak a négy alapművelet felhasználásával határozzuk meg $\sqrt{5}$ és $\sqrt{10}$ értékét 4 tizedesjegy pontossággal !

$\sqrt{5} = 2 \cdot \sqrt{1+1/4}$ és $\sqrt{10} = 3 \cdot \sqrt{1+1/9}$ miatt a $\forall x \in (-1, 1)$ $\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \cdot x^n$ sorfejtést (ld. a D. alatti feladatot !) alkalmazzuk. A Taylor formula alapján, ha $\sqrt{1+x}$ -et az n -dik Taylor polinomjával közelítjük, akkor az elkövetett hiba $R_n(x) = (-1)^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}\cdot(n+1)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+\xi)^{2n+1}}} \cdot x^{n+1}$, ahol ξ a 0 és x közötti érték, így **pozitív** x **-ek** esetén a **hiba** abszolút értéke $|R_n(x)| < \frac{(2n-1)!!}{(2(n+1))!!} \cdot x^{n+1}$. Ha tehát n -et úgy választjuk meg, hogy ezen hiba 2-szerese ($x = 1/4$ esetén) ill. 3-szorosa ($x = 1/9$ esetén) kisebb legyen, mint $5 \cdot 10^{-5}$, akkor $T_n(x)$ már jó közelítés lesz. Az $x = 1/4$ esetben pl. $n = 4$ -re $2 \cdot \frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10} \cdot \frac{1}{4^5} \approx 5.3 \cdot 10^{-5}$ még nem jó, de $n = 5$ -re már $2 \cdot \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12} \cdot \frac{1}{4^6} \approx 1 \cdot 10^{-5} < 5 \cdot 10^{-5}$ megfelelő, tehát $2 \cdot T_5\left(\frac{1}{4}\right)$ 4 tizedesjegy pontossággal megadja $\sqrt{5}$ értékét, $\sqrt{5} \approx 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2\cdot4} \cdot \frac{1}{4^2} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6} \cdot \frac{1}{4^3} - \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8} \cdot \frac{1}{4^4} + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10} \cdot \frac{1}{4^5}\right) \approx 2.2360764$.

Az $x = 1/9$ esetre kevesebb a számolás, $n = 2$ -re $3 \cdot \frac{3}{2\cdot4\cdot6} \cdot \frac{1}{9^3} \approx 3 \cdot 10^{-4}$ nem, de $n = 3$ -ra már $3 \cdot \frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8} \cdot \frac{1}{9^4} \approx 2 \cdot 10^{-5} < 5 \cdot 10^{-5}$ megfelelő, tehát $3 \cdot T_3\left(\frac{1}{9}\right)$ 4 tizedesjegy pontossággal megadja $\sqrt{10}$ értékét, $\sqrt{10} \approx 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{2\cdot4} \cdot \frac{1}{9^2} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6} \cdot \frac{1}{9^3}\right) \approx 3.162294$.