3. Határozzuk meg az $f(x) := \mathrm{e}^{-x} \cdot \sum_{n=0}^{99} \frac{x^n}{n!}$ értékadással megadott függvény értékkészletét !

Az exp fgv.-re a Taylor formulát alkalmazva kapjuk, hogy $\forall x \in \mathbf{R}$ $\exists \xi$ a 0 és x között, melyre $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot \left(\mathrm{e}^x - \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{100!} \cdot x^{100} \right) =$

$= 1 - \frac{\mathrm{e}^{\xi - x}}{100!} \cdot x^{100} \le 1$, másrészt $f(0) = 1$ és $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} \cdot \sum_{n=0}^{99} \frac{x^n}{n!} = \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} \cdot \lim\limits_{x \to -\infty} \sum_{n=0}^{99} \frac{x^n}{n!} = +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$,

továbbá f folytonossága miatt $\forall y \in (-\infty, 1]$ $y \in R(f)$, így $R(f) = (-\infty, 1]$.

Megj.: Az értékkészletet a fv. diszkussziójával is meghatározhattuk volna: $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{99} \frac{x^n}{n!}}{\mathrm{e}^x} = 0$,

$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot \left(\sum_{n=0}^{99} n \cdot \frac{x^{n-1}}{n!} - \sum_{n=0}^{99} \frac{x^n}{n!} \right) = \mathrm{e}^{-x} \cdot \left(\sum_{n=0}^{98} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{99} \frac{x^n}{n!} \right) = -\mathrm{e}^{-x} \cdot \frac{x^{99}}{99!}$, melyből $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, és

$\forall x < 0$ $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ sz.mon.nő a $(-\infty, 0)$ intervallumon, és $\forall x > 0$ $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ sz.mon.fogyó a $(0, +\infty)$ intervallumon,

$f''(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot \left(\frac{x^{99}}{99!} - \frac{x^{98}}{98!} \right) = \frac{x^{98}}{98!} \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot \left(\frac{x}{99} - 1 \right)$, melyből látható, hogy $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 99$, és

$\forall x < 99$ $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ sz.konkáv a $(-\infty, 99)$ interv.-on, és $\forall x > 99$ $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ sz.konvex a $(99, +\infty)$ interv.-on,

tehát az $x = 99$ helyen a f -nek inflexiója van. Az $x \equiv 0$ egyenes a fgv. $+\infty$ -beli aszimptotája, hiszen $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ és $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

4. Irjuk fel az $f(x) := \mathrm{e}^{x^2 - 2x + 3}$ értékadással megadott függvény $u = 1$ középpontú Taylor sorát !

Az exp függvény 0 középpontú Taylor sorát használjuk fel : $\forall x \in \mathbf{R}$ $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$, így

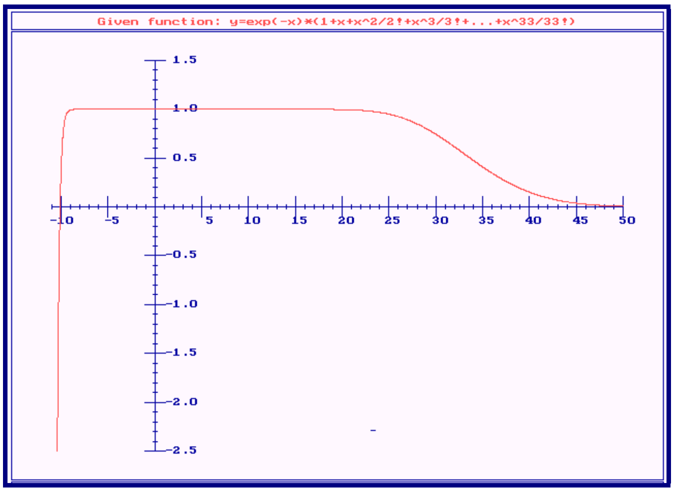
$\forall x \in \mathbf{R}$ $\mathrm{e}^{x^2 - 2x + 3} = \mathrm{e}^{(x-1)^2 + 2} = \mathrm{e}^2 \cdot \mathrm{e}^{(x-1)^2} = \mathrm{e}^2 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot \left((x-1)^2 \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^2}{n!} \cdot (x-1)^{2n}$, ez tehát f 0 kp.ú Taylor sora.

Megj.: A fenti sorból f -nek az 1 helyhez tartozó Taylor polinomjai leolvashatók:

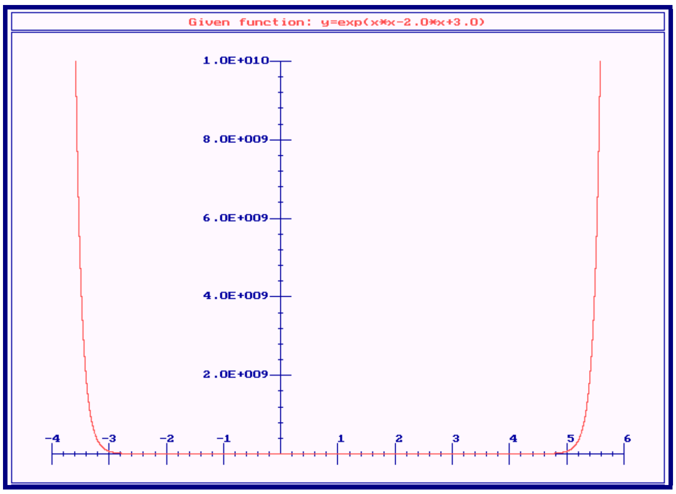
$$\forall n \in \mathbf{N}_0 \qquad T_{1,2n}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^2}{n!} \cdot (x-1)^{2n} \quad \text{és} \quad T_{1,2n+1}(x) = T_{1,2n}(x) ,$$

továbbá a deriváltak 1 helyen felvett értékei: $\forall n \in \mathbf{N}_0$ $\frac{f^{(2n)}(1)}{(2n)!} = \frac{\mathrm{e}^2}{n!} \Rightarrow f^{(2n)}(1) = \frac{\mathrm{e}^2 \cdot (2n)!}{n!}$ és $f^{(2n+1)}(1) = 0$.

Grafikonok: $f(x) := \mathrm{e}^{-x} \cdot \sum_{n=0}^{33} \frac{x^n}{n!}$ és $f(x) := \mathrm{e}^{x^2 - 2x + 3}$



A 0 hely közelében a szumma az exponenciális függvényt közelíti , így itt az f függvény közelítőleg a *konstans* 1 függvény !!!
(A szummában 33-adfokú polinomfgv. áll, a grafikon jellege a páratlan fokszám miatt u.a., mint a Hf-ben szereplő 99-edfokú Taylor polinomra.)



A fgv.grafikon szimmetrikus az $x = 1$ egyenesre. Az 1 hely közelében a függvényértékek viszonylag “kisebb” értékei miatt a fgv. változása nem látható.