45.j feladat: **Függvényvizsgálat.**

1. $f(x) := \sqrt{\dfrac{x^4+3}{x^2+1}}$, $D(f) = \mathbf{R}$. Nullhelyek: nincsenek, $\forall x \in D(f) \quad f(x) > 0$,

Határértékek: $D(f)$ azon torl. pontjaiban, ahol f nem folytonos, vagy nem értelmezett: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

2. Monotonitás, szélsőértékek: $f'(x) = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{\dfrac{x^4+3}{x^2+1}}} \cdot \dfrac{4x^3 \cdot (x^2+1) - (x^4+3) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x \cdot (x^4 + 2x^2 - 3)}{\sqrt{(x^2+1)^3} \cdot \sqrt{x^4+3}}$,

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 , \quad x = -1 \quad$ vagy $\quad x = 1$,

$f'(x) < 0$, ha $x \in (-\infty, -1)$ vagy $x \in (0, 1)$ $\Rightarrow$ f szig. mon. fogyó a $(-\infty, -1)$ és $(0, 1)$ intervallumokon,

$f'(x) > 0$, ha $x \in (-1, 0)$ vagy $x \in (1, +\infty)$ $\Rightarrow$ f szig. mon. növő a $(-1, 0)$ és $(1, +\infty)$ intervallumokon,

$\Rightarrow$ $f(-1) = f(1) = \sqrt{2}$ globális minimumok, $f(0) = \sqrt{3}$ lokális maximum.

3. Értékkészlet: f monoton szakaszainak és határértékeinek ismeretében: $R(f) = [\sqrt{2}, +\infty)$.

4. Konvexitás, konkávitás, inflexió: $f''(x) =$

$$= \frac{(5x^4+6x^2-3) \cdot \sqrt{(x^2+1)^3} \cdot \sqrt{x^4+3} \; - \; x \cdot (x^4+2x^2-3) \cdot \left(\dfrac{3 \cdot (x^2+1)^2 \cdot 2x}{2 \cdot \sqrt{(x^2+1)^3}} \cdot \sqrt{x^4+3} \; + \; \sqrt{(x^2+1)^3} \cdot \dfrac{4x^3}{2 \cdot \sqrt{x^4+3}} \right)}{(x^2+1)^3 \cdot (x^4+3)} =$$

$$= \frac{(5x^4+6x^2-3) \cdot (x^2+1)^3 \cdot (x^4+3) \; - \; x \cdot (x^4+2x^2-3) \cdot \left(3 \cdot (x^2+1)^2 \cdot x \cdot (x^4+3) \; + \; (x^2+1)^3 \cdot 2x^3 \right)}{\sqrt{(x^2+1)^9} \cdot \sqrt{(x^4+3)^3}} =$$

$$= \frac{(5x^4+6x^2-3)\,(x^2+1)\,(x^4+3) \; - \; x\,(x^4+2x^2-3) \left(3x\,(x^4+3) + (x^2+1)\,2x^3 \right)}{\sqrt{(x^2+1)^5} \cdot \sqrt{(x^4+3)^3}} = \frac{2x^{10} + 3x^8 + 14x^6 + 18x^4 + 36x^2 - 9}{\sqrt{(x^2+1)^5} \cdot \sqrt{(x^4+3)^3}}$$

$x \in \mathbf{R}^+$ esetén a számláló deriváltja pozitív (a derivált polinom pozitív együtthatói miatt), így $\mathbf{R}^+$-on a számláló szig.mon.nő, s mivel a 0 helyen negatív (-9) és pl. az $\frac{1}{2}$ helyen pozitív értékű, Bolzano tétele miatt $\exists\, x_0 \in (0, \frac{1}{2})$, melyre zérus értékű, s így $f''(x_0) = 0$ és $\forall\, x \in (0, x_0) \quad f''(x) < 0$, $\forall\, x \in (x_0 + \infty) \quad f''(x) > 0$. Ebből (figyelembevéve f párosságát is) kapjuk: f szig.konkáv a $(-x_0, x_0)$ intervallumon, szig.konvex a $(-\infty, -x_0)$ és $(x_0, +\infty)$ intervallumokon, inflexió a $-x_0$ és x_0 pontokban.

5. Aszimptoták: f-nek van aszimptotája, ha $\exists \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - m \cdot x - b \right) = 0 \;\Rightarrow\; m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - mx \right)$,

tehát itt $m_{1,2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{\dfrac{x^2 + \frac{3}{x^2}}{x^2+1}} = \pm 1$, $b_{1,2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt{\dfrac{x^4+3}{x^2+1}} \mp x \right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+3} \mp x \cdot \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} =$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3 - x^2}{\sqrt{x^2+1} \cdot \left(\sqrt{x^4+3} \pm x \sqrt{x^2+1} \right)} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{3}{x^2} - 1}{\operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \left(\operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{x^2 + \frac{3}{x^2}} \pm \sqrt{x^2+1} \right)} = 0 ,$$

vagyis a $+\infty$ -beli aszimptota az $x \mapsto x$ egyenes,

a $-\infty$ -beli aszimptota az $x \mapsto -x$ egyenes.