NUMERIKUS SOROK (FELADATOK)

1. $\boxed{a_n := \frac{1}{n}\cdot e^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}} = \frac{1}{n}\cdot e\cdot\sqrt{e}\cdot\sqrt[3]{e}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{e}$. Felhasználva, hogy $\forall n\in\mathbf{N}$ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, kapjuk:

$a_n > \frac{1}{n}\cdot\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\cdot\sqrt[n]{e} = \sqrt[n]{e}$ és $a_n < \frac{1}{n}\cdot e\cdot\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = e$, azaz

$\forall n\in\mathbf{N}$ $\sqrt[n]{e} < a_n < e$ (1). Másrészt $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}\cdot\sqrt[n+1]{e} < \frac{n}{n+1}\cdot\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = 1$ miatt $\forall n\in\mathbf{N}$ $a_{n+1} < a_n$ (2), vagyis (a_n) szigorúan monoton fogyó. $\Rightarrow$ (Korlátosság és monotonítás) az (a_n) sorozat konvergens. (1) és (2), valamint az ln függvény szigorú monoton növekedése alapján a $\boxed{b_n := \ln(a_n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n}$ sorozat is konvergens és $\forall n\in\mathbf{N}$

$\frac{1}{n} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n) < 1$ miatt a $\boxed{c := \lim(b_n)}$ határértékre (melyhez b_n szig.mon. fogyólag tart) $0\le c<1$. ($c\approx 0.577$)

2. $\sum_{(1)}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$; A sor a Leibnitz kritérium alapján konvergens. (Jelváltó sor, $\left(\frac{1}{n}\right)$ monoton fogyó nullsorozat !)

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - 2\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \ln(2n)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right) + \ln(2n) - \ln(n) \to$$

$$\xrightarrow{(1.)} c - c + \ln 2 = \ln 2 \quad (\ \ln(2n) - \ln(n) = \ln 2\ !\ ) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}} = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \boxed{\ln 2} .$$

3. $\sum_{(2)}\left(\frac{1}{n\cdot(\ln n)^{\alpha}}\right)$ ($\alpha\in\mathbf{R}^+$) ; $\left(\frac{1}{n\cdot(\ln n)^{\alpha}}\right)$ monoton fogyó pozitív tagú sorozat, így pontosan akkor konvergens, ha

a $\sum_{(1)}\left(\frac{2^n}{2^n\cdot(\ln 2^n)^{\alpha}}\right) = \sum_{(1)}\left(\frac{1}{n^{\alpha}\cdot(\ln 2)^{\alpha}}\right) = \frac{1}{(\ln 2)^{\alpha}}\cdot\sum_{(1)}\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$ sor konvergens $\Rightarrow$ $\alpha>1$ -re konvergens, $\alpha\le 1$ -re divergens.

4. $\sum_{(0)}\left((-1)^n\frac{3^{2n}}{n!}\cdot x^n\right)$ ($x\in\mathbf{R}$) ; $\sqrt[n]{\left|(-1)^n\frac{3^{2n}}{n!}\cdot x^n\right|} = \sqrt[n]{\frac{3^{2n}}{n!}\cdot|x|^n} = \frac{3^2}{\sqrt[n]{n!}}\cdot|x| \to 0 \Rightarrow \limsup(\sqrt[n]{|a_n|}) = 0 < 1$

$\Rightarrow$ (gyökkritérium) a sor absz. konvergens ($\Rightarrow$ konvergens.)

5. $\sum_{(1)}\left(\frac{n^3}{5^n}\cdot x^n\right)$ ($x\in\mathbf{R}$) ; $\sqrt[n]{\left|\frac{n^3}{5^n}\cdot x^n\right|} = \sqrt[n]{\frac{n^3}{5^n}\cdot|x|^n} = \frac{(\sqrt[n]{n})^3}{5}\cdot|x| \to \frac{|x|}{5} \Rightarrow \limsup(\sqrt[n]{|a_n|}) = \frac{|x|}{5} \Rightarrow$

(gyökkrit.) $|x|<5$ a sor absz. konvergens, $|x|>5$ divergens; $|x|=5$ esetén nem nullsorozatból képezett a sor, így divergens.

6. $\sum(a_n)$ $a_n := \begin{cases}\frac{1}{2^k}, & n=2k-1\\ \frac{1}{3^k}, & n=2k\end{cases}$, $k\in\mathbf{N}$; $\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases}\sqrt[2k-1]{\frac{1}{2^k}} = \frac{1}{\sqrt[2k-1]{2^k}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sqrt[2k]{\frac{1}{3^k}} = \frac{1}{\sqrt[2k]{3^k}} \to \frac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}$ $\Rightarrow \limsup(\sqrt[n]{a_n}) = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

$\Rightarrow$ (gyökkrit.) a sor konvergens.

A hányadoskrit. nem használható, u.i. $\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = \frac{2^k}{3^k} \to 0$ és $\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{3^k}{2^{k+1}} \to +\infty \Rightarrow \limsup(\frac{a_{n+1}}{a_n}) = +\infty$, $\liminf(\frac{a_{n+1}}{a_n}) = 0$.