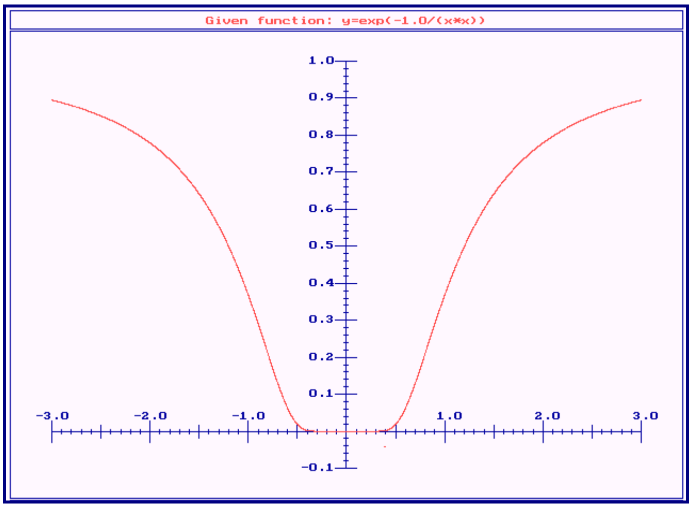
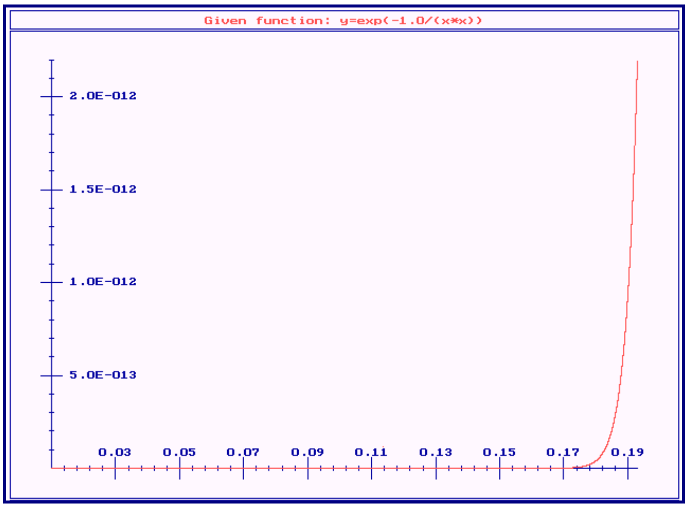
Az $\mathbf{R}$ -en értelmezett $f(x) := \mathrm{e}^{-1/x^2}$ $(x \neq 0)$, $f(0) := 0$ hozzárendeléssel definiált függvény végtelen sokszor differenciálható, és a 0-beli deriváltak mindegyike zérus, azaz $\forall n \in \mathbf{N}$ $f^{(n)}(0) = 0$.





Bizonyítás :

Az $x \neq 0$ esetre először belátjuk, hogy $\forall n \in \mathbf{N}$ $\exists\, f^{(n)}(x) = p_{3n}(\frac{1}{x}) \cdot \mathrm{e}^{-1/x^2}$, ahol p_{3n} $3n$ -edfokú polinomfüggvény.

Valóban, $n = 1$ -re $f'(x) = \frac{2}{x^3} \cdot \mathrm{e}^{-1/x^2}$, tehát $p_3 = 2\,\mathrm{id}^3$; ha pedig n -re igaz az állítás, akkor az $n+1$ -dik derivált:

$f^{(n+1)}(x) = p'_{3n}(\frac{1}{x}) \cdot (-\frac{1}{x^2}) \cdot \mathrm{e}^{-1/x^2} + p_{3n}(\frac{1}{x}) \cdot (\frac{2}{x^3}) \cdot \mathrm{e}^{-1/x^2} = (- p'_{3n}(\frac{1}{x}) \cdot (-\frac{1}{x})^2 + 2 \cdot p_{3n}(\frac{1}{x}) \cdot (\frac{1}{x})^3\ ) \cdot \mathrm{e}^{-1/x^2}$, melyből látható (felhasználva, hogy p'_{3n} $3n-1$ -edfokú polinom), hogy e^{-1/x^2} szorzótényezője $\frac{1}{x}$ -nek $3n+3$ fokszámú polinomja.

Az $x = 0$ -beli deriváltak létezése és 0 értéke teljes indukcióval bizonyítható, felhasználva $f^{(n-1)}$ 0-beli folytonosságát és a $\lim\limits_{x \to 0} f^{(n)}(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{p_{3n}(\frac{1}{x})}{\mathrm{e}^{1/x^2}} = 0$ határértéket (a számlálóban véges számú $konst \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^{k/2}$ alakú tag összege áll $(k \in \mathbf{N})$, így a tagonként vett hányadosok mindegyikének határértéke 0, (Komp. II. hat.érték, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ belső fgv., $x \mapsto \frac{x^p}{\mathrm{e}^x}$ külső fgv.)). ☻

Következmény: Az $\mathbf{R}$ -en értelmezett $f(x) := \mathrm{e}^{-1/x^2}$ $(x \neq 0)$, $f(0) := 0$ hozzárendeléssel definiált f függvény 0 körüli Taylor sora az egész $\mathbf{R}$ -en konvergens, összegfüggvénye a konstans 0 függvény. f 0 körüli Taylor sora tehát csak egyetlen pontban, a zérus helyen állítja elő a függvényt. (A kifejtési helyen ez egyébként minden függvény esetén nyilvánvaló.)