

#### IV. Racionális törtfüggvények integrálása :

##### a.) Nevező $(a \cdot x + b)^n$ , számláló elsőfokú vagy konstans :

100. $\int \frac{14}{(6-4x)^7} dx = ?$	101. $\int \frac{5}{2-3x} dx = ?$	102. $\int \frac{5}{(2x+3)^4} dx = ?$
103. $\int \frac{3x}{(6-4x)^7} dx = ?$	104. $\int \frac{4x-3}{(3x-5)^3} dx = ?$	105. $\int \frac{3x+1}{(1-2x)^{101}} dx = ?$

##### b.) Nevező másodfokú, számláló konstans :

106. $\int \frac{1}{x^2 + 4x + 8} dx = ?$	107. $\int \frac{1}{x^2 + 6x + 20} dx = ?$	108. $\int \frac{2}{3x^2 + 6x + 15} dx = ?$
109. $\int \frac{2}{2x^2 - 3x + 20} dx = ?$	110. $\int \frac{1}{x^2 + 6x + 9} dx = ?$	111. $\int \frac{1}{x^2 + 8x + 12} dx = ?$

##### c.) Nevező másodfokú, számláló elsőfokú :

112. $\int \frac{2x-3}{x^2 + 4x - 5} dx = ?$	113. $\int \frac{5x-6}{x^2 - 2x + 10} dx = ?$	114. $\int \frac{x+2}{x^2 - x + 2} dx = ?$
--	---	--

##### d.) Parciális törtekre bontás :

115. $\int \frac{14}{(x-3) \cdot (x+2) \cdot (x-4)} dx = ?$	116. $\int \frac{x^3-4}{5x^3-x} dx = ?$	117. $\int \frac{x^4}{(x-1) \cdot (x+2)} dx = ?$
118. $\int \frac{2x-4}{(x-1)^2 \cdot (x+1)^2} dx = ?$	119. $\int \frac{5}{x \cdot (x^2+4)} dx = ?$	120. $\int \frac{2x^2}{x^4-1} dx = ?$

#### V. Trigonometrikus függvények racionális kifejezéseinek integrálása :

##### a.) Trigonometrikus függvények pozitív egész kitevős hatványai :

121. $\int \sin^7 x dx = ?$	122. $\int \cos^4 x dx = ?$	123. $\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x dx = ?$
124. $\int \sin^4 x \cdot \cos^6 x dx = ?$	125. $\int \sin^2 2x \cdot \cos^3 x dx = ?$	126. $\int \cos^2 2x \cdot \cos 3x dx = ?$

##### b.) Helyettesítés :

$$t := \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

127. $\int \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x} dx = ?$	128. $\int \frac{1}{1 + \cos x} dx = ?$	129. $\int \frac{1}{\sin x} dx = ?$
130. $\int \frac{1}{\cos x} dx = ?$	131. $\int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx = ?$	132. $\int \frac{1}{\sin^3 x} dx = ?$
133. $\int \frac{\cos x}{\cos 2x} dx = ?$	134. $\int \frac{\sin x}{\cos 2x} dx = ?$	135. $\int \frac{1}{\sin x + \cos x - 2} dx = ?$

#### VI. Vegyes feladatok : ( Primitív függvény, Riemann-integrál, Integrálfüggvény, Improprius integrál I. )

136. $\int \frac{1}{e^{2x} - 2e^x + 1} dx = ?$	137. $\int \frac{1}{e^x + e^{-x} + 2} dx = ?$	138. $\int \frac{1}{e^x + 20e^{-x} + 6} dx = ?$
139. $\int x \cdot \sqrt{x-1} dx = ?$	140. $\int x \cdot \sqrt[4]{x-1} dx = ?$	141. $\int (1+x^3)^{-1} dx = ?$

142. $\int \frac{1}{\sqrt{x \cdot (x-1)}} dx = ?$	143. $\int \frac{1}{\sqrt{x \cdot (1-x)}} dx = ?$	144. $\int \frac{1}{\sqrt{x \cdot (1+x)}} dx = ?$
145. $\int \operatorname{sign} _{(0,+\infty)}(x) dx = ?$	146. $\int (2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}) dx = ?$	147. $\int (2x \cdot \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cdot \cos \frac{1}{x^2}) dx = ?$

148. $\int_2^5 x^2 \cdot \sqrt{x-1} dx = ?$	149. $\int_5^{10} \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx = ?$	150. $\int_1^2 x^2 \cdot \ln \sqrt{x} dx = ?$
151. $\int_{-1}^1  \operatorname{arc} \operatorname{tg} x  dx = ?$	152. $\int_{-1}^1 \operatorname{arc} \operatorname{tg}  x  dx = ?$	153. $\int_{-5}^5 \sin x^3 \cdot \ln(1+ x ) dx = ?$
154. $\int_0^\pi x^2 \cdot \sin x dx = ?$	155. $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x dx = ?$	156. $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = ? \quad (n \in \mathbf{N}^+)$

157. a.) Van-e olyan  $f:[a,b] \rightarrow \mathbf{R}$  függvény, amelynek **van primitív függvénye**, de  $f$  **nem integrálható** ?  
b.) Van-e olyan **integrálható, nem folytonos**  $f:[a,b] \rightarrow \mathbf{R}$  függvény, amelynek **van primitív függvénye** ?  
c.) Van-e olyan **integrálható**  $f:[a,b] \rightarrow \mathbf{R}$  függvény, amelynek **nincs primitív függvénye** ?

158. Igazoljuk, hogy az  $f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ha } x = \frac{p}{q}, \quad (p, q) = 1, \quad p \in \mathbf{Z}, \quad q \in \mathbf{N}^+ \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$  Riemann-függvény bármely korlátos és zárt intervallumon integrálható ! Mivel egyenlő ez az integrál ?

159. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket : a.)  $F:[-1,3] \rightarrow \mathbf{R}, \quad F(x) := \int_{-1}^x [t] dt$ ,  
b.)  $F:[-a,a] \rightarrow \mathbf{R}, \quad F(x) := \int_{-a}^x |t-1| + |t| dt, \quad (a \in \mathbf{R}^+) !$

160. Határozzuk meg az alábbi értékadásokkal adott függvények deriváltjait !

a.)  $f(x) := \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt$ ,      b.)  $f(x) := \int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$ ,      c.)  $f(x) := \int_{\sin x}^{\cos x} \operatorname{arcsin} t dt$  !

161. Léteznek-e az alábbi határértékek : a.)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \operatorname{arc} \operatorname{tg}^2 t dt}{\sqrt{x^2+1}}$ ,      b.)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$  ?

162. Vizsgáljuk meg az  $F:(0,2\pi) \rightarrow \mathbf{R}, \quad F(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$  függvény monotonitási és görbületi tulajdonságait !

163. $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = ?$	164. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = ?$	165. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = ?$
166. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = ?$	167. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = ?$	168. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = ?$