IRRACIONÁLIS KITEVŐJŰ HATVÁNYOK

I. $a \in \mathbf{R}^+, \quad r_n \to r \quad (r_n, r \in \mathbf{Q}) \quad \Rightarrow \quad a^{r_n} \to a^r$. **Bizonyítás:** Az $a=1$ eset nyilvánvaló, $a \neq 1$ -re pedig:

1. $r=0$ esetén: ha $a>1$, akkor $\varepsilon \in \mathbf{R}^+ \quad \exists M \in \mathbf{N} \quad 1-\varepsilon < a^{-\frac{1}{M}} < a^{\frac{1}{M}} < 1+\varepsilon$ (felhasználva, hogy $\sqrt[n]{a} \to 1$), és $\frac{1}{M}$ -hez $\exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq N \quad -\frac{1}{M} < r_n < \frac{1}{M}$, emiatt $1-\varepsilon < a^{-\frac{1}{M}} < a^{r_n} < a^{\frac{1}{M}} < 1+\varepsilon$, tehát $a^{r_n} \to 1$; ha pedig $a<1$, akkor $\frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^{r_n} \to 1 \Rightarrow a^{r_n} \to 1$. **2.** $r \in \mathbf{Q}, \quad r_n - r \to 0 \quad \Rightarrow \quad a^{r_n} = a^{r_n - r} \cdot a^r \to 1 \cdot a^r = a^r$. ☻

II. $a \in \mathbf{R}^+, \quad r_n \to x \quad (r_n \in \mathbf{Q}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \quad \Rightarrow \quad \exists \lim (a^{r_n}) \in \mathbf{R}^+$ és független az (r_n) sorozattól.

Bizonyítás: **1.** Az $a=1$ eset nyilvánvaló. **2.** $a>1$ esetén: Legyen (s_n) monoton növő x –hez tartó racionális tagú sorozat.

$\Rightarrow \forall n \in \mathbf{N} \quad s_n \leq s_{n+1} \leq x < [x]+1 \quad \Rightarrow \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad a^{s_n} \leq a^{s_{n+1}} < a^{[x]+1} \quad \Rightarrow \quad \exists \lim (a^{s_n}) \in \mathbf{R}^+$ (u.i. (a^{s_n}) mon.növő és f.korl.).

Ha (r_n) x –hez tartó tetsz. (rac.tagú) sorozat, akkor $r_n - s_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad a^{r_n} = a^{r_n - s_n} \cdot a^{s_n} \to 1 \cdot \lim (a^{s_n}) = \lim (a^{s_n})$.

3. Ha $a<1$, akkor $\frac{1}{a} > 1 \quad \Rightarrow \quad \exists \lim \left(\frac{1}{a}\right)^{r_n} =: A \in \mathbf{R}^+ \quad \Rightarrow \quad \exists \lim (a^{r_n}) = \frac{1}{A} \in \mathbf{R}^+$. ☻

Definíció (irracionális kitevőjű hatvány) : $a \in \mathbf{R}^+, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \quad a^x := \lim (a^{r_n}), \quad r_n \to x$ racionális tagú sorozat.

Megj.: Az I. alatti állítást is figyelembevéve, $\forall a \in \mathbf{R}^+, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad a^x = \lim (a^{r_n})$ ahol $r_n \to x$ racionális tagú sorozat.

1. Állítás: $a \in \mathbf{R}^+ \quad x, y \in \mathbf{R}, \quad a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.

Biz.: Legyenek $r_n \to x$ és $s_n \to y$ rac.tagú sorozatok. $a^{x+y} = \lim (a^{r_n + s_n}) = \lim (a^{r_n} \cdot a^{s_n}) = \lim (a^{r_n}) \cdot \lim (a^{s_n}) = a^x \cdot a^y$. ☻

2. Állítás: $a \in \mathbf{R}^+ \quad x, y \in \mathbf{R}, \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$.

Biz.: Később bizonyítjuk. ☺ ▶

3. Állítás: $a, b \in \mathbf{R}^+ \quad x \in \mathbf{R}, \quad (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$.

Biz.: Legyen $r_n \to x$ rac.tagú sorozat. $(a \cdot b)^x = \lim \left((a \cdot b)^{r_n}\right) = \lim (a^{r_n} \cdot b^{r_n}) = \lim (a^{r_n}) \cdot \lim (b^{r_n}) = a^x \cdot b^x$. ☻

4. Állítás: $a \in \mathbf{R}^+, \ a > 1 \quad \Rightarrow \quad x, y \in \mathbf{R}, \quad x < y$ esetén $a^x < a^y$,

$a < 1 \quad \Rightarrow \quad x, y \in \mathbf{R}, \quad x < y$ esetén $a^x > a^y$.

Biz.: Legyenek $r_n \to x$ és $s_n \to y$ rac.tagú sorozatok, és $x < r < s < y, \quad r, s \in \mathbf{Q}. \quad \Rightarrow \quad \exists M \in \mathbf{N} \ \forall n \geq M \quad r_n < r < s < s_n \quad \Rightarrow$ ha $a>1$: $a^{r_n} < a^r < a^s < a^{s_n} \quad \Rightarrow \quad a^x = \lim (a^{r_n}) \leq a^r < a^s \leq \lim (a^{s_n}) = a^y$; ha $a<1$: $\left(\frac{1}{a}\right)^x < \left(\frac{1}{a}\right)^y$ miatt $a^x > a^y$. ☻

III. $a \in \mathbf{R}^+, \quad x_n \to x \quad (x_n, x \in \mathbf{R}) \quad \Rightarrow \quad a^{x_n} \to a^x$. **Bizonyítás:** Az $a=1$ eset nyilvánvaló, $a \neq 1$ -re pedig:

1. $x=0$ esetén: ha $a>1$, akkor $\varepsilon \in \mathbf{R}^+ \quad \exists M \in \mathbf{N} \quad 1-\varepsilon < a^{-\frac{1}{M}} < a^{\frac{1}{M}} < 1+\varepsilon$ (felhasználva, hogy $\sqrt[n]{a} \to 1$), és $\frac{1}{M}$ -hez $\exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq N \quad -\frac{1}{M} < x_n < \frac{1}{M}$ miatt $1-\varepsilon < a^{-\frac{1}{M}} < a^{x_n} < a^{\frac{1}{M}} < 1+\varepsilon$, tehát $a^{x_n} \to 1$; ha pedig $a<1$, akkor $\frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^{x_n} \to 1 \Rightarrow a^{x_n} \to 1$. **2.** $x \in \mathbf{R}, \quad x_n - x \to 0 \quad \Rightarrow \quad a^{x_n} = a^{x_n - x} \cdot a^x \to 1 \cdot a^x = a^x$. ☻

► **2. Állítás :** $a\in\mathbf{R}^+ \quad x,y\in\mathbf{R}, \quad (a^x)^y = a^{x\cdot y}$. **Bizonyítás:**

Legyen $r_n\to x$ rac.tagú sorozat és $r\in\mathbf{Q}$. Ekkor $(a^x)^r = \left(\lim(a^{r_n})\right)^r = \lim\left((a^{r_n})^r\right) = \lim(a^{r_n\cdot r}) = a^{x\cdot r}$,
így ha $s_n\to y$ rac.tagú sorozat, akkor $(a^x)^y = \lim\left((a^x)^{s_n}\right) = \lim(a^{x\cdot s_n}) = a^{x\cdot y}$. ☺

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNYEK

Definíció : $a\in\mathbf{R}^+\setminus\{1\}, \quad f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+ \quad f(x):=a^x$ az a alapú exponenciális függvény. **Jelölés:** $\exp_a$.

Megj.: $\exp_a$ **szigorúan monoton növő** függvény, ha $a>1$, **szigorúan monoton fogyó**, ha $0<a<1$.

LOGARITMUSFÜGGVÉNYEK

IV. $a\in\mathbf{R}^+\setminus\{1\}, \quad b\in\mathbf{R}^+, \quad \exists!\ x\in\mathbf{R} \quad a^x = b$. **Bizonyítás:** **1.** $a>1$: $\exists M\in\mathbf{N} \quad a^{-M}<b<a^M$ (u.i. $a^n\to+\infty$).
$c_1:=-M, \quad d_1:=M$; és $\forall n\in\mathbf{N} \quad f_n:=\frac{c_n+d_n}{2}$; $c_{n+1}:=f_n$, $d_{n+1}:=d_n$, ha $a^{f_n}\le b$; $c_{n+1}:=c_n$, $d_{n+1}:=f_n$, ha $a^{f_n}>b$.
$\Rightarrow$ (Cantor kp.t.) $\exists!\ x\in\mathbf{R} \quad c_n\to x$ mon. növő, $d_n\to x$ mon. fogyó $\Rightarrow$ $a^{c_n}\to a^x\le b$ és $a^{d_n}\to a^x\ge b$ $\Rightarrow$ $a^x=b$.
(Felhasználtuk, hogy a konstrukció miatt $\forall n\in\mathbf{N} \quad a^{c_n}\le b<a^{d_n}$.) **2.** $a<1$: $\exists!\ x\in\mathbf{R} \quad \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{b} \quad\Rightarrow\quad a^x=b$. ☺

Definíció (a **alapú logaritmus) :** $a\in\mathbf{R}^+\setminus\{1\}, \quad b\in\mathbf{R}^+, \quad \log_a b := x$, melyre $a^x = b$.

Köv.: **1.** $\log_a a = 1$ **2.** $\forall x\in\mathbf{R} \quad \log_a b^x = x\cdot\log_a b$ **3.** $\forall x,y\in\mathbf{R}^+ \quad \log_a xy = \log_a x + \log_a y$

4. $\forall x,y\in\mathbf{R}^+ \quad x<y \quad\Rightarrow\quad a>1$ esetén $\log_a x<\log_a y$, $0<a<1$ esetén $\log_a x>\log_a y$.

V. $a\in\mathbf{R}^+\setminus\{1\}, \quad x_n\to x \quad (x_n, x\in\mathbf{R}^+) \quad\Rightarrow\quad \log_a x_n\to\log_a x$. **Bizonyítás:** Ha $a>1$, akkor
1. $x=1$ esetén: $\varepsilon\in\mathbf{R}^+ \quad \exists M\in\mathbf{N} \quad \forall n\ge M \quad a^{-\varepsilon}<x_n<a^{\varepsilon} \quad\Rightarrow\quad -\varepsilon<\log_a x_n<\varepsilon \quad\Rightarrow\quad \log_a x_n\to 0 = \log_a 1$;
2. $x\in\mathbf{R}^+, \quad \frac{x_n}{x}\to 1 \quad\Rightarrow\quad \log_a\frac{x_n}{x} = \log_a x_n - \log_a x \to 0 \quad\Rightarrow\quad \log_a x_n\to\log_a x$.
Ha $0<a<1$, akkor $\frac{1}{a}>1 \quad\Rightarrow\quad \log_{\frac{1}{a}} x_n \to \log_{\frac{1}{a}} x$, azaz $-\log_a x_n\to-\log_a x \quad\Rightarrow\quad \log_a x_n\to\log_a x$. ☺

Definíció : $a\in\mathbf{R}^+\setminus\{1\}, \quad f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R} \quad f(x):=\log_a x$ az a alapú logaritmusfüggvény. **Jelölés:** $\log_a$.

Az exponenciális és logaritmus-függvények grafikonja:

($a=10$ és $a=0.1$ esetén)