I. ZÁRTHELYI B. csoport, **MEGOLDÁSOK** (2003. november 10.)

1. Állítsuk elő az $f(x):=x^4-x^3+x^2-x+6$ polinomfüggvény -1 középpontú Taylor - sorát ! Mi lesz ennek összegfüggvénye ?

$f'(x)=4x^3-3x^2+2x-1$, $f''(x)=12x^2-6x+2$, $f'''(x)=24x-6$, $f^{(4)}(x)=24$ és $f^{(n)}(x)=0$ $(n>4)$, így $\forall x\in\mathbf{R}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(-1)}{n!}\cdot(x+1)^n=10-\tfrac{10}{1!}\cdot(x+1)+\tfrac{20}{2!}\cdot(x+1)^2-\tfrac{30}{3!}\cdot(x+1)^3+\tfrac{24}{4!}\cdot(x+1)^4=10-10(x+1)+10(x+1)^2-5(x+1)^3+(x+1)^4=f(x).$$

2. Fejtsük hatványsorba az $f(x):=\sqrt{18-18x+9x^2}$ hozzárendeléssel megadott függvényt !

$f(x)=\sqrt{18-18x+9x^2}=3\cdot\sqrt{1+(1-2x+x^2)}=3\cdot\sqrt{1+(x-1)^2}=3\cdot\left(1+(x-1)^2\right)^{1/2}$, emiatt a Binomiális tételt alkalmazzuk :

Ha $n>1$, akkor $\binom{\frac{1}{2}}{n}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdot\ldots\cdot(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(2n-3)!!}{2^n\cdot n!}=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$ ($n=0,1$ -re is alkalmas képlet), így ha

$(x-1)^2<1$, azaz $x\in(0,2)$, akkor $f(x)=3\cdot\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\cdot\left((x-1)^2\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\cdot3\cdot\dfrac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\cdot(x-1)^{2n}$ (Biz.ható: $x\in[0,2]$).

3. Határozzuk meg az $\{x\in\mathbf{R}: \sum\limits_{(0)}(-1)^n\cdot\dfrac{n^{101}}{7^n+(-1)^n+3^n}\cdot(x+1)^n$ sor konvergens $\}$ halmazt !

$\limsup\sqrt[n]{|c_n|}=\limsup\sqrt[n]{\dfrac{n^{101}}{7^n+(-1)^n+3^n}}=\lim\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{(\sqrt[n]{n})^{101}}{\sqrt[n]{1+(-\frac{1}{7})^n+(\frac{3}{7})^n}}=\dfrac{1}{7}$ $\Rightarrow$ $R=7$, a konvergenciaintervallum végpontjaiban

a sor nem konvergens, u.i. itt $|c_n|=\dfrac{n^{101}}{7^n+(-1)^n+3^n}\cdot7^n\to+\infty$, így a konvergenciaintervallum : $I=(-8,6)$.

4. Állítsuk elő a $\sum\limits_{(0)}(n+1)\cdot(x-3)^n$ és a $\sum\limits_{(0)}(x-3)^n$ hatványsorok Cauchy - szorzatát és ennek összegfüggvényét !

Ha $|x-3|<1$, akkor $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot(x-3)^n=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x-3)^{n+1}\right)'=\left(\dfrac{x-3}{1-(x-3)}\right)'=\left(\dfrac{x-3}{4-x}\right)'=\dfrac{(4-x)+(x-3)}{(4-x)^2}=\dfrac{1}{(4-x)^2}$ és

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x-3)^n==\dfrac{1}{1-(x-3)}=\dfrac{1}{4-x}$, így a Cauchy - szorzatra: $\forall x\in(2,4)$ $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot(x-3)^n\right)\cdot\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x-3)^n\right)=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)\cdot(x-3)^k\cdot(x-3)^{n-k}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left((x-3)^n\cdot\sum_{k=0}^{n}(k+1)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\cdot(x-3)^n=\frac{1}{(4-x)^2}\cdot\frac{1}{4-x}=\frac{1}{(4-x)^3}.$$

5. Határozzuk meg a $\sum\limits_{(1)}\dfrac{1}{n\cdot2^n}\cdot x^{n+2}$ hatványsor összegfüggvényét !

a.) A $\sum\limits_{(1)}\dfrac{1}{n\cdot2^n}\cdot x^n$ (és deriváltsorának) konvergenciasugara, R$=\dfrac{1}{\limsup\sqrt[n]{|c_n|}}=\limsup\sqrt[n]{n\cdot2^n}=2$, így $\forall x\in(-2,2)$

$\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot2^n}\cdot x^n\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\cdot x^{n-1}=\dfrac{1}{2}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{2-x}=\left(-\ln(2-x)\right)'$ $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot2^n}\cdot x^n=c-\ln(2-x)$,

$c=\ln2$ ($x=0$ helyettesítésből). A sor $x=-2$ -re is konvergens, így kapjuk : $\forall x\in[-2,2)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot2^n}\cdot x^{n+2}=x^2\cdot\ln\dfrac{2}{2-x}$.

b.) $\ln(1+x)$ sorfejtéséből : Ha $-\frac{x}{2}\in(-1,1]$, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot2^n}\cdot x^{n+2}=-x^2\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot(-\dfrac{x}{2})^n=-x^2\cdot\ln(1-\dfrac{x}{2})=x^2\cdot\ln\dfrac{2}{2-x}$.

6. Legfeljebb mekkora hibát követhetünk el, amikor a $(-1,1)$ intervallumon az $x\mapsto\sin x$ függvényt a 0 körüli ötödik Taylor - polinomjával közelítjük ? Adjuk meg ezt a polinomot ! Becsüljük meg a hibát az $x=0.01$ helyre vonatkozóan !

$T_{0,5}(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x5}{120}$ és $\forall x\in(-1,1)$ $\left|\sin x-T_{0,5}(x)\right|=\left|\sin x-T_{0,6}(x)\right|=\left|\frac{\sin^{(7)}(\xi)}{7!}\cdot x^7\right|<\frac{1}{7!}\cdot1^7<\frac{1}{7!}$; $x=10^{-2}$ -ra $<\frac{1}{7!}\cdot10^{-14}$.