ANALíZIS ELŐADÁS, MÁSOD ÉVES MATEMATIKA TANÁR SZAK
2003-2004 I. FÉLÉV

Ennek a jegyzetnek a célja, hogy a vizsgára készülést segítse. Nem pontosan az előadások anyagát tartalmazza, a logikai felépítést és a kifejtést néhol kicsit megváltoztattam. Sajnos túl kevés visszajelzést kaptam. A jegyzet gépelési hibákat tartalmazhat, kérem értelemmel kezelni és nekem jelezni. Az esetleges hibák nem mentenek fel senkit a vizsgán. Ha valami nem világos, konzultáción lehet kérdezni.

A jegyzet folyamatosan bővül, a múlt félévben tanult anyagra rendszeresen hivatkozom. E jegyzet kiegészítéseként ajánlom az előadás Power Point prezentációit, melyek megtalálhatók honlapomon, valamint Károlyi Katalin gyakorlakokhoz készített anyagait, melyek az ő honlapján lelhetők fel. További ajánlott irodalom a vizsgára készüléshez:

- T. Sós Vera: Analízis 1/1, 1/2, jegyzet, Tankönyvkiadó *(Taylor polinomok, Taylor formula; Riemann integrál)*
- Urbán János: Határértékszámítás , Bolyai sorozat, Műszaki Kiadó *(Taylor sorok és hatványsorok, feladatgyűjtemény, de elmélet is kidolgozott feladatok formájában.)*
- Németh J., Varga A., Az integrálról, Középiskolai szakköri füzet, Tankönyvkiadó *(Középiskolás szinten foglalkozik az integrállal. Fontos olvasmány.)*
- Petruska György: Analízis I., Egyetemi jegyzet, ELTE *(Tömör jegyzet, Taylor sorok, Riemann integrál)*
- Bárczy Barnabás: Integrálszámítás, Bolyai sorozat, Műszaki Kiadó *(Feladatgyűjtemény)*
- Szász Pál: A differenciál- és integrálszámítás elemei I., Typotex *(Hatványsorok, Taylor sorok, Riemann integrál. Klasszikus könyv sok példával.)*

1. Taylor polinomok

A továbbiakban annak a gyakorlatban igen fontos problémának szenteljük figyelmünket, hogy hogyan lehet differenciálható, szép függvények függvényértékeit közelítőleg kiszámolni polinomok segítségével. A konkrét szituáció, amire gondolunk, a következő: próbáljuk meg meghatározni $\sin 1$ vagy $\ln 2$ értékét tetszőleges pontossággal. Mivel számítógépek, számológépek csak az alapműveletekkel tudnak számolni, ezért próbálunk polinomokkal közelíteni. Fontos még kiemelni, hogy az előző két feladatnak megvan az a közös jellemzője, hogy mind a sin, mind az ln függvényről egy másik, nevezetesen a 0 valamint az 1 pontokban ismerjük a függvényértékeket és a deriváltak értékeit.

Fogalmazzuk meg általánosabban a feladatot. Legyen $D(f) = I$ intervallum, $a \in \operatorname{int} I$ belső pont és f legyen (legalább) n-szer differenciálható az a pontban. Keressük azt a $p_n(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$ képlettel megadott n-edfokú polinomot, amely a „lehető legjobban" közelíti az f függvényt.

Mielőtt tovább mennénk, tisztáznunk kellene, mit is értsünk a „lehető legjobb" közelítés fogalmán. Bár a közelítő polinomot később az a ponttól különböző helyeken szeretnénk használni, hogy a függvényértékeket közelítsük, mivel az f függvényt az a helyen ismerjük, kézenfekvőnek látszik, hogy olyan polinomot keressünk, ami az a helyen közelít a „lehető legjobban", és reménykedjünk, hogy ez a közelítő polinom közeli x értékekre is jól működik.

Az a pontban vett lehető legjobb közelítésnél kétféle dologra is gondolhatunk.

- Az egyik, szemléletesen kifejezve, hogy ha nagyítóval ránéznénk a két függvény grafikonjára, akkor azok nagyon egybesimulnak, azaz alig lehet őket egymástól megkülönböztetni. Ezt analitikusan úgy lehet megfogalmazni, hogy a deriváltak ameddig csak lehetséges megegyeznek, azaz

$$f(a) = p_n(a),\ f'(a) = p_n'(a),\ \ldots,\ f^{(n)}(a) = p_n^{(n)}(a).$$

  Nyilván egy n-ed fokú polinom $n+1$-edik deriváltjára nem írhatunk elő feltételt (miért?).

Date: January 2, 2004.
BÁTKAI ANDRÁS

- A másik, amire gondolhatunk, hogy az $f(x) - p_n(x)$ kifejezés a lehető leggyorsabban tartson nullához, ha x tart a-hoz. Hogy ez alatt mit értünk, ahhoz szorítkozzunk egy pillanatra elsőfokú polinomokra. A jó közelítéshez nyilván szükséges, hogy $f(a) = p_1(a)$. Folytonosság miatt viszont ekkor már
$$\lim_{x\to a}(f(x) - p_1(x)) = 0.$$
Nyilván a legjobban közelítő egyenestől ennél sokkal többet várunk. Valóban, múlt félévben láttuk[1], hogy ha $p_1(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ az érintő, azaz a legjobban közelítő egyenes, akkor nemcsak a fenti határérték 0, hanem
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - p_1(x)}{x-a} = 0.$$
Tehát $(f(x) - p_1(x))$ az $(x-a)$-nál gyorsabban tart 0-hoz.
Ennek analógiájára várhatjuk, hogy $p_n(x)$ akkor a lehető legjobban közelítő polinom, ha
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - p_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

A következő állítás azt mutatja, mindkét fogalommal ugyanarra az eredményre jutunk.

1.1. **Tétel.** *Legyen $D(f) = I$ intervallum, f (legalább) n-szer differenciálható az I intervallum belsejében, $a \in \operatorname{int} I$ belső pont és tekintsük a*
$$t_{a,n}(x) := t_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
polinomot. Ekkor

(a)
$$t_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$
(b)
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - t_n(x)}{(x-a)^n} = 0,$$
(c) és ha $p_n(x)$ olyan legfeljebb n-ed fokú polinom, melyre (b) teljesül, akkor $t_n(x) \equiv p_n(x)$.

Bizonyítás. Az (a) állítás nyilvánvaló, hiszen
$$t_n^{(k)}(x) = 0 + f^{(k)}(a) + f^{(k+1)}(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^n(a)}{(n-k)!}(x-a)^{n-k}.$$

A (b) állítás bizonyításához vezessünk be új jelöléseket az egyszerűsítés kedvéért. Legyen $g(x) := f(x) - t_n(x)$. Az (a) állításból következik, hogy
$$g(a) = g'(a) = \ldots = g^{(n)}(a) = 0.$$
Legyen továbbá $h(x) = (x-a)^n$, erre az (a) pont alatt elvégzett számolással adódik, hogy
$$h^{(k)}(x) = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)(x-a)^{n-k} \quad (0 \le k \le n),$$
így speciálisan $h^{(n-1)}(x) = n!(x-a)$ és
$$h(a) = h'(a) = \ldots = h^{(n-1)}(a) = 0.$$

A Cauchy középértéktétel szerint bármely $x \in I$ ponthoz található olyan $\alpha_1 \in (a,x)$ vagy $\alpha_1 \in (x,a)$, aszerint, hogy $a < x$ vagy $x < a$, hogy
$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g(x) - g(a)}{h(x) - h(a)} = \frac{g'(\alpha_1)}{h'(\alpha_1)}.$$

Hasonlóan, teljes indukcióval található $\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, melyekre $\alpha_{k+1} \in (a, \alpha_k)$ vagy $\alpha_{k+1} \in (\alpha_k, a)$ aszerint, hogy $a < x$ vagy $x < a$, és
$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g'(\alpha_1)}{h'(\alpha_1)} = \frac{g'(\alpha_1) - g'(a)}{h'(\alpha_1) - h'(a)} = \frac{g''(\alpha_2)}{h''(\alpha_2)} = \ldots = \frac{g^{(n-1)}(\alpha_{n-1}) - g^{(n-1)}(a)}{h^{(n-1)}(\alpha_{n-1}) - h^{(n-1)}(a)}.$$

[1] Múlt félévi jegyzet 3.15 Tétel.

Mivel a feltétel szerint $g^{(n-1)}$ is differenciálható, így a múlt félévben tanult jellemzés szerint[2] található $\varepsilon > 0$ és $r : (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \to \mathbb{R}$, hogy $y \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ esetén

$$g^{(n-1)}(y) - g^{(n-1)}(a) = g^{(n)}(a)(y-a) + r(y),$$

ahol

$$\frac{r(y)}{y-a} \to 0, \qquad \text{ha } y \to a,$$

így bármely $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ esetén

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{1}{n!}\left(g^{(n)}(a) + \frac{r(\alpha_{n-1})}{\alpha_{n-1}-a}\right) \longrightarrow \frac{g^{(n)}(a)}{n!} = 0, \text{ ha } x \to a,$$

hiszen ilyenkor $\alpha_{n-1} = \alpha_{n-1}(x) \to a$ is következik.

A (c) állítás bizonyításához tegyük fel, hogy $p_n(x)$ egy olyan legfeljebb n-ed fokú polinom, melyre

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

Ekkor

$$\frac{f(x) - p_n(x)}{(x-a)^n} = \frac{f(x) - t_n(x)}{(x-a)^n} + \frac{t_n(x) - p_n(x)}{(x-a)^n}$$

miatt

$$\lim_{x\to a} \frac{t_n(x) - p_n(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

ami csak úgy lehetséges, hogy a számláló azonosan nulla, azaz $t_n(x) \equiv p_n(x)$. □

1.2. *Megjegyzés.* Ha valakinek az előző tétel (b) állításának a bizonyítása ismerősnek tűnt, ne lepődjön meg. A múlt félévben a l'Hospital szabály bizonyításakor találkoztunk hasonlóval.

Érdemes meggondolni, hogy a fenti (b) állítást a l'Hosptial szabály n-szer egymás után történő alkalmazásával is bizonyítani lehet. Itt most a gondolatmenet átismétlése miatt választottuk ezt az egyébként nem sokkal hosszabb bizonyítást. A vizsgán persze bármilyen helyes gondolatmenet szerepelhet.

1.3. **Definíció.** Az f (legalább) n-szer differenciálható függvényhez tartozó

$$t_{a,n}(x) := t_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

polinomot az f függvény n-edik *Taylor polinom*jának nevezzük.

1.4. *Megjegyzés.* Brook Taylor [1685–1731] angol matematikus.

Az előzőekben tisztáztuk, hogy egy "elegendően sima" függvényt adott pontban a Taylor polinomja közelíti a legjobban. Most térjünk vissza az eredeti kérdéshez, nevezetesen ahhoz, hogyan lehet egy függvényt egy, az a ponttól különböző pontban közelíteni. Ehhez lesz szükségünk a kövezkezőkre.

1.5. **Tétel** (Taylor formula Lagrange féle maradéktaggal)**.** *Legyen $D(f) = I$ intervallum, f legalább $(n+1)$-szer differenciálható az I intervallum belsejében, $a \in \operatorname{int} I$. Ekkor minden $x \in \operatorname{int} I$ ponthoz található olyan $\alpha = \alpha(n,x)$ szám, melyre*

$$f(x) = t_{n,a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Bizonyítás. Az előző tétel bizonyításához igen hasonló gondolatmenetet alkalmazunk. Legyen

$$h(x) = (x-a)^{n+1}$$

és

$$t_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Nyilván $h(a) = h'(a) = \ldots = h^n(a) = 0$. Mivel ismét

$$f(a) - t_n(a) = f'(a) - t_n'(a) = \ldots = f^{(n)}(a) - t_n^{(n)}(a) = 0,$$

[2]Múlt félévi jegyzet 3.15 Tétel.

ezért rögzített $x \in I$ esetén a Cauchy középértéktétel ismételt alkalmazásával nyerjük, hogy található olyan $\alpha_1 \in (a,x)$ vagy $\alpha_1 \in (x,a)$, aszerint, hogy $a < x$ vagy $x < a$, valamint $\alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$, melyekre $\alpha_{k+1} \in (a, \alpha_k)$ vagy $\alpha_{k+1} \in (\alpha_k, a)$ aszerint, hogy $a < x$ vagy $x < a$, és

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-t_n(x)}{h(x)} &= \frac{f'(\alpha_1)-t_n'(\alpha_1)}{h'(\alpha_1)} = \dots = \frac{f^{(n)}(\alpha_n)-t_n^{(n)}(\alpha_n)}{h^{(n)}(\alpha_n)} \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\frac{\left(f^{(n)}(\alpha_n)-t_n^{(n)}(\alpha_n)\right)-\left(f^{(n)}(a)-t_n^{(n)}(a)\right)}{\alpha_n - a}\end{aligned}$$

Alkalmazva a Lagrange középértéktételt az $F(t) = f^{(n)}(t) - t_n^{(n)}(t)$ függvényre kapjuk, hogy található $\alpha \in (\alpha_n, x) \subset (a,x)$ vagy $\alpha \in (x, \alpha_n) \subset (x,a)$, aszerint, hogy $a < x$ vagy $x < a$, melyre

$$\frac{f(x)-t_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!}\left(f^{(n+1)}(\alpha) - t_n^{(n+1)}(\alpha)\right) = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!},$$

hiszen $t_n^{(n+1)}(y) = 0$. □

1.6. *Megjegyzés.* Abban a gyakori esetben, amikor az I intervallum belsejében tartalmazza a 0 számot és $a = 0$, a fenti összefüggést szokás *Maclaurin formulá*nak nevezni.

1.7. *Megjegyzés.* Colin Maclaurin [1698–1746] angol matematikus, az edinburghi egyetem professzora. A 0 középpontú Taylor sor mellett ő adta meg először az egyváltozós függvények szélsőértékének vizsgálatára vonatkozó szokásos eljárást. Az analízis mellett ábrázoló és algebrai geometriával is foglalkozott.

1.8. **Következmény.** *Legyen $D(f) = I$ intervallum és legyen f akárhányszor differenciálható az I intervallum belsejében, valamint legyen $a, x \in \operatorname{int} I$. Ha található $K \geq 0$, hogy*

$$\left|f^{(n)}(y)\right| \leq K$$

minden $n \in \mathbb{N}$ és minden $y \in (a,x)$ vagy $y \in (x,a)$ számra attól függően, hogy $a < x$ vagy $x < a$, akkor

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

A megadott végtelen sort szokás az adott f függvény *Taylor sor*ának nevezni. A következőkben megadjuk a legfontosabb elemi függvények Taylor sorát. A bizonyítások a gyakorlatokon szerepelnek és megtalálhatók Urbán J.: Határértékszámítás című könyvében is.

1.9. **Tétel.** *A következő sorfejtések érvényesek.*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} \qquad x \in (-1, 1],$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad x \in J,\ (-1,1) \subset J \subset [-1,1],\ \textit{ha}\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0,\ \textit{és} \quad J = \mathbb{R}\ \textit{ha}\ \alpha \in \mathbb{N}_0$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad x \in [-1, 1],$$

A továbbiakban az úgynevett hatványsorok, azaz a $\sum(a_n x^n)$ alakú végtelen sorok tulajdonságaival szeretnénk foglalkozni. Ehhez azonban szükségünk van a sorok szorzására, amivel ki kell egészítenünk az első félévben végtelen sorokról tanultakat.

1.10. **Definíció.** Legyenek $\sum(a_n)$ és $\sum(b_n)$ végtelen sorok. E két sor *Cauchy-szorzat*án azt a $\sum(c_n)$ végtelen sort értjük, melyre

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Formálisan a Cauchy szorzatot úgy képzelhetjük el, mintha a végtelen sorok végtelen összegek lennének, és szorzásukkor minden tagot minden taggal megszorzunk.

1.11. **Tétel.** *Legyenek $\sum(a_n)$ és $\sum(b_n)$ abszolút konvergens végtelen sorok. Ekkor a Cauchy szorzatuk abszolút konvergens és*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

Bizonyítás. később... □

2. Hatványsorok

A továbbiakban az úgynevett hatványsorok, azaz a $\sum(a_n(x-x_0)^n)$ alakú végtelen sorok tulajdonságaival szeretnénk foglalkozni. Végtelen (numerikus) sorokhoz hasonlóan nem a hatványsor, hanem annak az összege az érdekes, így most nem is definiáljuk a hatványsort. Az $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ függvény vizsgálatánál két fontos kérdést vizsgálunk.

- $D(f) =?$, azaz mely $x \in \mathbb{R}$ esetén lesz $\sum(a_n(x-x_0)^n)$ konvergens?
- Milyen tulajdonságokkal rendelkezik az f függvény?

Az első kérdésre viszonylag gyorsan egy majdnem teljes választ tudunk adni.

2.1. **Tétel** (Cauchy-Hadamard)**.** *Legyen*

$$r := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \left(\frac{1}{+0} = +\infty,\ \frac{1}{+\infty} = 0\right).$$

Ha

$$|x - x_0| < r, \qquad \textit{akkor } \sum (a_n (x - x_0)^n) \qquad \textit{konvergens, ha}$$
$$|x - x_0| > r, \qquad \textit{akkor } \sum (a_n (x - x_0)^n) \qquad \textit{divergens.}$$

Az első esetben a konvergencia abszolút.

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és alkalmazzuk a $\sum(a_n(x - x_0)^n)$ sorra a gyökkritériumot. Ezek szerint a sor abszolút konvergens, ha

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = |x - x_0| \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

Átrendezéssel kapjuk az első állítást.

Hasonlóan, a gyökkritérum divergenciafeltételét alkalmazva kapjuk, hogy a sor divergens, ha

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = |x - x_0| \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1.$$

□

Az előző tételben szereplő r számot a hatványsor *konvergenciasugar*ának nevezzük.

2.2. *Megjegyzés.* Jaques Hadamard [1865–1963] francial matematikus. A komplex függvénytan, a differenciálegyenletek és a funkcionálanalízis területén alkotott jelentőset hosszú éltete során.

Az első félévben tanultak alapján rögtön megfogalmazhatjuk a következő állítást a konvergenciasugárra.

2.3. **Következmény.** *Amennyiben létezik*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

akkor

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Összefoglalva az előző állítást, egy hatványsor mindig egy szimmetrikus, x_0 középpontú intervallumon konvergens. Az intervallum belső pontjaiban abszolút konvergens, a végpontokbeli konvergenciát pedig külön meg kell vizsgálni. Ezek alapján szokás azt mondani, hogy $\sum(a_n(x - x_0)^n)$ egy x_0 középpontú hatványsor.

2.4. **Definíció.** A $\sum(a_n(x - x_0)^n)$ hatványsor *konvergenciahalmaz*a a

$$K := \left\{x \in \mathbb{R} : \sum(a_n(x - x_0)^n) \text{ konvergens}\right\}$$

intervallum, *összegfüggvény*e az

$$D(f) := \operatorname{int} K = (x_0 - r, x_0 + r) \qquad (r \neq 0)$$
$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

függvény.

A továbbiakban a hatványsor összegfüggvényének tulajdonságaival szeretnénk foglalkozni. Ehhez alapvető lesz a következő, úgynevezett transzformációs tétel.

2.5. **Tétel.** *Legyen* $\sum(a_n(x - x_0)^n)$ *egy pozitív konvergenciasugárral rendelkező hatványsor, azaz* $r > 0$, *és legyen* $x_1 \in \operatorname{int} K = (x_0 - r, x_0 + r)$ *tetszőleges. Ekkor minden* $x \in \operatorname{int} K$ *pontra, melyre* $|x - x_1| < r - |x_1 - x_0|$*, teljesül, hogy*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{i=0}^{\infty} b_i (x - x_1)^i,$$

ahol

$$b_i = \sum_{n=i}^{\infty} \binom{n}{i} a_n (x_1 - x_0)^{n-i}.$$

Bizonyítás. A bizonyítás kiindulási pontja az a mély állítás, hogy

$$x - x_0 = (x - x_1) + (x_1 - x_0),$$

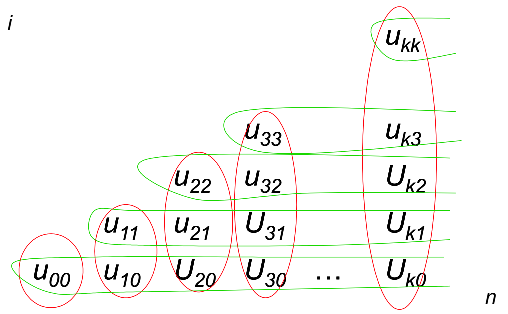
amiből a binomiális tétel szerint

$$(x - x_0)^n = [(x - x_1) + (x_1 - x_0)]^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (x - x_1)^i (x_1 - x_0)^{n-i}.$$

Ezt beírva a hatványsorba, mely a feltétel szerint konvergens, kapjuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} a_n \binom{n}{i} (x - x_1)^i (x_1 - x_0)^{n-i} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} u_{ni}.$$

Ez egy abszolút konvergens sor, melyben, az alábbi ábra jelöléseit használva, az elemeket függőleges (piros) oszloponként adjuk össze. Mivel abszolút konvergens sor átrendezhető, ugyanazt az eredményt kapjuk, ha a sort vízszintes (zöld) soronként összegezzük.



Tehát

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} u_{ni} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} u_{ni} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} a_n \binom{n}{i} (x - x_1)^i (x_1 - x_0)^{n-i}$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} b_i (x - x_1)^i.$$

□

A végtelen sorokkal végezhető műveletek alapján azonnal adódik a következő állítás.

2.6. **Állítás.** *Legyen* $\sum (a_n (x - x_0)^n)$ *és* $\sum (b_n (x - x_0)^n)$ *két,* $r_1 > 0$ *és* $r_2 > 0$ *konvergenciasugárral rendelkező hatványsor. Ekkor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x - x_0)^n,$$
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \ldots + a_0 b_n)(x - x_0)^n$$

minden olyan x *számra, melyre* $|x - x_0| < \min\{r_1, r_2\}$*.*

Tehát az adott intervallumon hatványsorként felírható függvények gyűrűt alkotnak. A továbbiakban vizsgáljuk a hatványsor összegfüggvényének legfontosabb analitikus tulajdonságait.

2.7. **Tétel.** *Hatványsor összegfüggvénye folytonos.*

Bizonyítás. Emlékeztetünk rá, hogy a $\sum(a_n(x-x_0)^n)$ hatványsor összegfüggvényét az (x_0-r,x_0+r) nyílt intervallumon definiáltuk ha $r>0$. Az állítást is csak ebben az esetben kell bizonyítani, hiszen az egy pontban értelmezett függvény mindig folytonos.

Legyen $x_1\in(x_0-r,x_0+r)$. Az előző transzformációs tétel szerint f függvény az x_1 pontnak elegendően kis δ sugarú környezetében felírható x_1 középpontú hatványsorként mint

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}b_i(x-x_1)^i.$$

Tehát annyit kell belátnunk, hogy

$$\lim_{x\to x_1}f(x)=b_0.$$

Ehhez legyen $0<\rho<\delta$, akkor a feltételek szerint $\sum_{i=0}^{\infty}b_i\rho^i$ konvergens. Jelölje

$$\sigma:=\sum_{i=1}^{\infty}b_i\rho^{i-1}.$$

Ekkor ha $|x-x_1|<\rho$, akkor

$$|f(x)-b_0|=\left|(x-x_1)\sum_{i=1}^{\infty}b_i(x-x_1)^{i-1}\right|\le|x-x_1|\sigma,$$

amiből az x_1 pontbeli folytonosság már azonnal következik. □

2.8. **Tétel.** *A pozitív konvergenciasugarú $\sum(a_n(x-x_0)^n)$ hatványsor összegfüggvénye tetszőlegesen sokszor differenciálható és*

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x-x_0)^n,$$

$$f''(x)=2a_2+2\cdot3a_3(x-x_0)+3\cdot4(x-x_0)^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(x-x_0)^n,$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)(n+k-1)\ldots(n+1)a_{n+k}(x-x_0)^n.$$

Bizonyítás. Legyen $x_1\in(x_0-r,x_0+r)$. Az előző bizonyítás gondolatmenetét alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=b_1+b_2(x-x_1)+b_3(x-x_1)^2+\ldots\to b_1,\qquad \text{ha } x\to x_1,$$

hiszen az előző tétel szerint minden hatványsor folytonos. A transzformációs tétel szerint

$$f'(x_1)=b_1=\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n}{1}a_n(x_1-x_0)^{n-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}(x_1-x_0)^k.$$

Mivel f deriváltfüggvénye szintén hatványsor, ezért f' is deriválható. A k-adik deriváltra vonatkozó állítás teljes indukcióval látható be. □

2.9. **Következmény.** *Minden hatványsor az összegfüggvényének Taylor sora.*

Bizonyítás. Az előző tétel szerint

$$f^{(k)}(x_0)=k(k-1)\ldots1a_k,$$

azaz

$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},$$

valamint $f(x_0)=a_0$. □

Ezek az állítások lehetőséget adnak arra, hogy megfordítsuk a differenciálás műveletét.

2.10. **Definíció.** Legyen f valós-valós függvény, $D(f) = I$ intervallum. Azt mondjuk, hogy a $F : I \to \mathbb{R}$ függvény a f függvény *primitív függvénye*, ha F differenciálható és $F'(x) = f(x)$ minden $x \in I$ esetén.

2.11. **Tétel.** *Legyen* $\sum(a_n(x - x_0)^n)$ *pozitív konvergenciasugarú hatványsor. Ekkor a hatványsor összegfüggvényének van primitív függvénye, pl.*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás. Az állítás a hatványsorok összegfüggvénének differenciálására vonatkozó tételből azonnal következik. □

Fontos, hogy hatványsor összegfüggvényét az együtthatók egyértelműen meghatározzák.

2.12. **Tétel.** *Legyenek*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$$

olyan hatványsorok, melyeknek közös $(x_0 - r, x_0 + r)$ *konvergenciaintervalluma van. Legyen továbbá* $x_n \in (x_0 - r, x_0 + r)$ *olyan sorozat, melyhez található* $y \in (x_0 - r, x_0 + r)$*, hogy* $x_n \neq y$*,* $x_n \to y$ *és melyre* $f(x_n) = g(x_n)$*.*

Ekkor $a_n = b_n$ *minden* $n \in \mathbb{N}$ *indexre.*

Bizonyítás. A transzformációs tétel szerint elegendő azt az esetet vizsgálni, amikor $y = x_0$. Teljes indukcióval végezzük a bizonyítást. Mivel a hatványsor összegfüggvénye folytonos, ezért

$$a_0 = f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0) = b_0.$$

Tegyük fel, hogy egy $n \in \mathbb{N}$ számra teljesül, hogy $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $\ldots$, $a_n = b_n$. Ekkor a

$$f_1(x) := a_{n+1} + a_{n+2}(x - x_0) + a_{n+3}(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$g_1(x) := b_{n+1} + b_{n+2}(x - x_0) + b_{n+3}(x - x_0)^2 + \ldots$$

hatványsorok konvergenciahalmaza ugyanaz a K intervallum, és minden $x \neq x_0$ esetén

$$f_1(x) = \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k}{(x - x_0)^{n+1}} \text{ és } g_1(x) = \frac{g(x) - \sum_{k=0}^{n} b_k(x - x_0)^k}{(x - x_0)^{n+1}}.$$

A feltételek szerint $f_1(x_i) = g_1(x_i)$ minden $i \in \mathbb{N}$ esetén. Mivel f_1 és g_1 is hatványsor összegfüggvénye, ezért folytonosak. Ebből viszont, az $n = 0$ esetre vonatkozó gondolatmenettel kapjuk, hogy

$$a_{n+1} = f_1(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_1(x_n) = \lim_{n\to\infty} g_1(x_n) = g_1(x_0) = b_{n+1}.$$

□

2.13. **Definíció.** Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $D(f) = I$ nyílt intervallum. Azt mondjuk, hogy az f függvény *analitikus*, ha található $x_0 \in I$, $(a_n) \subset \mathbb{R}$, hogy $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ minden $x \in I$ esetén. Azt mondjuk, hogy az f függvény *lokálisan analitikus*, ha minden $x \in I$ ponthoz található olyan környezete, melyre megszorítva f analitikus.

Megjegyezzük, hogy a könyvek nem egységesek a szóhasználat tekintetében, van, ahol azt is analitikusnak hívják amit mi lokálisan analitikusnak. Tehát az exponenciális- a szinusz- és a logaritmusfüggvény példa lehet analitikus függvényre, a logaritmusfüggvény lokálisan analitikus de nem analitikus függvényre és az $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $f(0) = 0$ végtelen sokszor differenciálható de a 0 pontban nem (lokálisan) analitikus függvényre (lsd. gyakorlat vagy Urbán: Határértékszámítás).

Tehát az új szóhasználattal az előző tétel azt mondja ki, hogy két különböző, ugyanazon az intervallumon értelmezett lokálisan analitikus függvény legfeljebb megszámlálhatóan sok helyen veheti fel ugyanazt a függvényértéket, és ezek a pontok nem torlódhatnak az intervallum belsejében.

Példa lehet analitikus függvényekre, melyek végtelen sokszor veszik fel ugyanazt a függvényértéket a szinusz- és a koszinuszfüggvény.

A hatványsor összegfüggvényének a tulajdonságait a hatványsorok oszthatóságának kérdésével zárjuk. Mivel szorozni már tudunk, csak a reciprok kérdésével kell foglalkoznunk.

2.14. **Tétel.** *Legyen* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$*,* $r > 0$*,* $a_0 \neq 0$*. Ekkor található olyan* $\delta > 0$ *és* $(c_n) \subset \mathbb{R}$*, hogy*

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$$

minden $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ *esetén.*

Bizonyítás. Feltehető az egyszerűség kedvéért, hogy $x_0 = 0$ és $a_0 = 1$. A $\sum(|a_n| \cdot |x|^n)$ sor összegfüggvényének 0 helyen vett folytonossága miatt található $\delta > 0$, hogy

$$|a_1| \cdot |x| + |a_2| \cdot |x^2| + \ldots < 1$$

minden $|x| < \delta$ esetén.

Ekkor

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1-(-a_1x - a_2x^2 - \ldots)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-a_1x - a_2x^2 - \ldots)^n.$$

A Cauchy szorzatra vonatkozó tétel szerint (n-szeri alkalmazással) találhatók olyan a_{nk} együtthatók, hogy

$$(-a_1x - a_2x^2 - \ldots)^n = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}x^k.$$

Ezeket az együtthatókat akár ki is számolhatnánk, de fölösleges, hiszen a bizonyítás további menetéhez elegendő a létezésükről tudnunk. Tehát

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x^k\right)$$

ha $|x| < \delta$. Ismét használva az abszolút konvergens sorok átrendezhetőségére vonatkozó tételt, amit már a transzformációs tételnél is használtunk, kapjuk, hogy

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk}\right)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_kx^k$$

ha $|x| < \delta$. □

Tehát, az eddigieket összefoglalva, az x_0 középpontú pozitív konvergenciasugarú hatványsorok egy kommutatív gyűrűt alkotnak, melyben az invertálható elemek azok a hatványsorok, melyek első együtthatójára $a_0 \neq 0$. Megjegyzendő, hogy ezek a hatványsorok egy kommutatív algebrát is alkotnak.

2.15. *Megjegyzés.* Mutatunk egy eljárást arra, hogyan lehet két hatványsor hányadosának együtthatóit kiszámolni. Az eljárás lényegében a polinomok osztásánál tanultakkal azonos.

Legyen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n, \quad r > 0,\ g(0) = b_0 \neq 0.$$

Mivel elegendően kicsi x esetén

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n,$$

ezért

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(b_0c_n + b_1c_{n-1} + \ldots + b_nc_0)x^n.$$

Tehát

$$\begin{aligned}
a_0 =& b_0 c_0 \\
a_1 =& b_0 c_1 + b_1 c_0 \\
a_2 =& b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 \\
&\dots
\end{aligned}$$

Ebből a végtelen sok egyenletből igény és időnk szerint tetszőlegesen sok c_k együtthatót meghatározhatunk, pl.

$$\begin{aligned}
c_0 =& \frac{a_0}{b_0} \\
c_1 =& \frac{a_0 - \frac{a_0 b_1}{b_0}}{b_0} \\
&\dots
\end{aligned}$$

Ezt az eljárást kicsit hosszabban folytatva kaphatjuk például, hogy

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots} = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \dots,$$

ahol is

$$c_1 = 1, \qquad c_3 = \frac{1}{3}, \qquad c_5 = \frac{2}{15}.$$

Végül fejezzük be vizsgálódásainkat annak a kérdésnek a (részleges) tisztázásával, hogy amennyiben a konvergenciaintervallum valamely végpontjában is konvergens egy hatványsor, az itt kapott sorösszegnek mi köze van a hatványsor összegfüggvényéhez, mely az intervallum belsejében volt definiálva. A következő tétel mutatja, hogy ilyenkor az összegfügvény folytonosan kiterjeszthető a végpontra.

Egyszerűség kedvéért a tételt 0 középpontú hatványsor konvergenciaintervallumának jobb végpontjára fogalmazzuk meg, de ennek nincs jelentősége a bizonyítás szempontjából, a bal végpont vagy a nem zérus középpont esete hasonlóan tárgyalható.

2.16. **Tétel** (Abel)**.** *Legyen $\sum(a_n x^n)$ egy pozitív konvergenciasugarú hatványsor, $0 < r < \infty$, valamint legyen*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n < \infty,$$

azaz konvergens. Ekkor az

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

összegfüggvény folytonosan kiterjed az $x = r$ pontra, azaz

$$\lim_{x \to r-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n.$$

Bizonyítás. További egyszerűsítések kedvéért feltesszük, hogy $r = 1$. Ez a bizonyítás menetén nem változtat, csak jelöléseinket egyszerűsíti és teszi áttekinthetővé.

Legyen

$$s := \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \qquad s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Ekkor a Cauchy szorzatnál felírtak szerint, ha $|x| < 1$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n,$$

így

$$s - f(x) = s - (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \left((1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) s - (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(s - s_n)x^n.$$

Így

$$|s - f(x)| \le (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} |s - s_n| x^n.$$

Mivel az $s_n \to s$, ezért minden $\varepsilon > 0$ számhoz található $N \in N$ küszöbindex, hogy minden $n \ge N$ természetes számra $|s - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Így

$$|s - f(x)| \le (1-x)\sum_{n=0}^{N} |s - s_n| x^n + \frac{\varepsilon}{2}(1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty} x^n \le (1-x)\sum_{n=0}^{N} |s - s_n| + \frac{\varepsilon}{2},$$

hiszen $|x| < 1$.

Mivel a lineáris függvény folytonos, így $\varepsilon > 0$ számhoz található $\delta > 0$, hogy ha $x \in (1-\delta, 1)$, akkor

$$(1-x)\sum_{n=0}^{N} |s - s_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

azaz ha $x \in (1-\delta, 1)$, akkor

$$|s - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ami viszont pont a bizonyítandó állítás. □

2.17. *Megjegyzés.* Niels Henrik Abel [1802-1829] norvég matematikus. A XIX század egyik legjelentősebb hatású elméje. Az algebra megalapozásában és a komplex függvénytanban alkotott jelentőset.

2.18. *Példa.* Tekintsük a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

hatványsort. Láttuk, hogy ez a $(-1, 1)$ nyílt intervallumon az $f(x) = \ln(1+x)$ függvényt állítja elő. Ez a függvény értelmezési tartományának minden pontjában folytonos, amint azt a múlt félév elején (sőt az első félév végén) láttuk. A fenti hatványsor az $x = 1$ helyen konvergens, hiszen Leibniz típusú. Abel tétel szerint tehát a hatványsor összegfüggvénye folytonosan kiterjed az $x = 1$ pontra és ott a függvényérték a megfelelő sorösszeg, azaz

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

Ezt egyébként más módszerekkel az első félévben már beláttuk.

2.19. *Példa.* Az előző gondolatmenethez hasonlóan kapjuk az

$$\mathrm{arctg}\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

előállításból, hogy

$$\mathrm{arctg}\,(1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1},$$

azaz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

2.1. **Trigonometrikus függvények.** A múlt félév végén hosszabban tárgyaltuk a trigonometrikus függvények alaptulajdonságait, melyeket a következőkben foglalhatunk össze.

Geometriai megfogalmazás alapján, intuitív módon definiáltuk a szinusz- és a koszinuszfüggvényt és lényegében a következő tulajdonságokban állapodtunk meg.

- $D(\sin) = D(\cos) = \mathbb{R}$,
- sin páratlan, cos páros függvény,
- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$,
- $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$,
- $\cos 0 = 1$,
- $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Megemlítünk a múlt félévben és az ebben a félévben tanult legfontosabb következményekből néhányat.

- sin és cos tetszőlegesen sokszor differenciálható függvények,
- legfeljebb egy ilyen tulajdonságú függvénypár létezhet,
- $$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
- $$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Evvel a tárgyalásmóddal van egy nagy probléma. Bár a trigonometrikus függvények intuitív geometriai bevezetése rendkívül szemléletes, így valahányszor ezekről a függvényekről beszélünk, a geometriai jelentéssel képzeljük őket magunk elé, ez a felépítés hagy logikai kívánnivalót maga után. Gondoljunk csak arra, hogy a definícióhoz szükségünk van olyan fogalmakra, mint az ívhossz vagy a szög nagysága.

Tehát a trigonometrikus függvények tulajdonságaival nincs igazán probléma, a gond a definíciójuk, a létezés.

Most szeretnénk bemutatni egy lehetőséget arra, hogyan lehet azt a logikai csorbát kiköszörülni és a bonyolult geometriai fogalmakat kiküszöbölni. A cél nem az, hogy egy újfajta bevezetési lehetőséget mutassunk a trigonometrikus függvényekre, hanem hogy jól ismert fogalmakat az analízis logikai épületében a helyére tegyünk. A gondolatmenet igen jellemző a mai matematika egészére.

Megismertük intuitív módon a trigonometrikus függvényeket, azok alaptulajdonságait és az alaptulajdonságok fontosabb következményeit, igy a hatványsor-előállításukat. Ezeket a hatványsorokat viszont bonyolult geometriai fogalmak bevezetése nélkül is fel lehet írni, tulajdonságaikat lehet vizsgálni. Ez adhatja az ötletet arra, hogy megfordítsuk a gondolatmenetet és a hatványsor alakot használjuk a trigonometrikus függvények definíciójára. Tehát **legyen**

$$\sin x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

és legyen

$$\cos x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

A hatványsorokról tanultak alapján azonnal következnek a következő tulajdonságok:

- $D(\sin) = D(\cos) = \mathbb{R}$,
- sin páratlan, cos páros függvény,
- sin és cos tetszőlegesen sokszor differenciálható függvények,
- $\cos 0 = 1$,
- $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0+} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots\right) = 1$,
- $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$.

Az addíciós képletek beláthatók például a Cauchy szorzat segítségével (lsd. gyakorlatok vagy Károlyi Katalin kiadott anyagai), vagy a differenciálási szabályok alkalmazásával a következő módon.

Legyen rögzített de tetszőleges $y \in \mathbb{R}$ mellett

$$f(x) = [\sin(x+y) - \sin x \cos y - \cos x \sin y]^2 + [\cos(x+y) - \cos x \cos y + \sin x \sin y]^2 .$$

Kiszámolható, hogy $f(0) = 0$ és $f'(x) = 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, így $f \equiv 0$.

Ezzel beláttuk, hogy a hatványsorral definiált sin és cos függvények teljesítenek minden fontos alaptulajdonságot, amit a trigonometrikus függvényektől elvártunk. Mivel már beláttuk, hogy legfeljebb egy ilyen függvénypár létezhet, ezért ők azok.

Természetesen mivel nem használtunk logikailag bonyolult, de szemléletes geometriai fogalmakat, így a definiált függvények sem túl szemléletesek.

2.2. **Komplex hatványsorok.** Ez a pont tűnik a legmegfelelőbbnek arra, hogy rávilágítsunk arra, hogy nagyon sok minden abból, amit eddig analízisből tanultunk, átvihető a komplex számok körébe. Ehhez tisztáznunk kell sok mindent az alapfogalmakkal kapcsolatban.

Algebra előadáson a komplex számokról minden lényeges szerepelt, így egy komplex szám abszolútértéke is. Ez lehetővé eszi, hogy egy számsorozat konvergenciáját a valóshoz analóg módon definiáljuk.

2.20. **Definíció.** Legyen $z_n = a_n + b_n i \in \mathbb{C}$ komplex számokból álló sorozat és $z = a + bi \in \mathbb{C}$ komplex szám. Azt mondjuk, hogy a (z_n) sorozat tart a z számhoz, vagy a (z_n) sorozat határértéke a z szám, ha minden $\varepsilon > 0$ pozitív számhoz található $N \in \mathbb{N}$, hogy bármely $n \geq N$ természetes szám esetén $|z_n - z| < \varepsilon$.

2.21. **Állítás.** *Pontosan akkor teljesül, hogy $z_n \to z$, ha*

- *a $(|z_n - z|)$ valós számsorozatra $|z_n - z| \to 0$ teljesül.*
- *az (a_n) és (b_n) valós számsorozatokra $a_n \to a$, $b_n \to b$.*

Bizonyítás. Az első átfogalmazás triviális, a második pedig abból következik, hogy

$$|z_n - z|^2 = |a_n - a|^2 + |b_n - b|^2.$$

□

Ezeknek az átfogalmazásoknak nagy jelentősége, hogy komplex sorozatok konvergenciáját valós sorozatok konvergenciájával fogalmazza meg, így visszavezethetők erre az állítások. A sorozatok konvergenciájával kapcsolatban majdnem minden tétel újrafogalmazható és szó szerint ugyanúgy bizonyítható, mint a valós esetben. Lássunk néhány példát.

2.22. **Állítás.** *Legyen $z_n = a_n + b_n i \in \mathbb{C}$, $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $w_n = c_n + d_n i \in \mathbb{C}$, $w = c + di \in \mathbb{C}$. Ha $z_n \to z$ és $w_n \to w$, akkor*

- $$(z_n \pm w_n) \to z \pm w,$$
- $$(z_n \cdot w_n) \to zw,$$
- *Ha $w_n \neq 0$, $w \neq 0$, akkor*
$$\left(\frac{z_n}{w_n}\right) \to \frac{z}{w},$$
- $$(|z_n|) \to |z|.$$

Bizonyítás. Csak a szorzásra vonatkozó állítást bizonyítjuk, hogy lássuk a gondolatmenetet. Azt viszont kétféleképpen.

A valós esetet imitálva írhatjuk, hogy

$$|z_n w_n - zw| = |z_n(w_n - w) + (z_n - z)w| \leq |z_n| \cdot |w_n - w| + |z_n - z| \cdot |w| \to 0$$

a feltételek szerint.

A másik gondolatmenetet alkalmazva kapjuk, hogy

$$z_n w_n = (a_n c_n - b_n d_n) + i(a_n d_n + b_n c_n) \to (ac - bd) + i(ad + bc) = zw,$$

hiszen valós számsorozatokra már tudjuk a műveleti azonosságokat. □

Fontos kiemelni, hogy az egyetlen probléma a rendezésnél és az evvel kapcsolatos tételeknél jelentkezik. A komplex számok testét ugyanis nem tudjuk „értelmesen”, azaz a műveleti azonosságok megtartásával rendezni. Így nincs értelme szuprémumról vagy infímumról sem beszélni. Ennek ellenére a Bolzano-Weierstraß tétel, amit annak idején rendezési fogalmak segítségével bizonyítottunk, érvényben marad.

2.23. **Tétel** (Bolzano-Weierstraß). *Legyen $(z_n) \subset \mathbb{C}$ egy korlátos sorozat. Ekkor található olyan n_k indexsorozat, hogy z_{n_k} konvergens.*

Bizonyítás. Legyen $z_n = a_n + ib_n$. Az (a_n) valós sorozat korlátos, így a Bolzano-Weierstraß tétel tanult változata szerint található olyan $(n_l)_{l\in\mathbb{N}}$ indexsorozat, hogy (a_{n_l}) konvergens.

A (b_{n_l}) valós számsorozat is korlátos, így a Bolzano-Weierstraß tétel ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy található olyan $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ indexsorozat, hogy $(b_{n_{l_k}})$ sorozat konvergens. Mivel részsorozat részsorozata is részsorozat és konvergens sorozat részsorozata is konvergens, kapjuk, hogy

$$z_{n_{l_k}} = a_{n_{l_k}} + ib_{n_{l_k}}$$

konvergens részsorozat. □

Megjegyezzük, hogy végtelen sorokkal kapcsolatban minden, amit tanultunk, érvényben marad. Az abszolút konvergencia segítségével itt is sok konvergenciatételt pozitív tagú sorokra lehet visszavezetni.

A folytatásban megfogalmazzuk a legfontosabb ponthalmazelméleti alapfogalmakat. Az egyetlen különbség a valós esethez képest, hogy az ε sugarú szimetrikus intervallum szerepét az ε sugarú nyílt körlap veszi át.

2.24. **Definíció.** Jelölje

$$B(w, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - w| < r\}$$

a $w \in \mathbb{C}$ pont $r > 0$ sugarú környezetét. Ez egy w középpontú, r sugarú nyílt körlap a komplex számsíkon.

Legyen $D \subset \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C}$. Azt mondjuk, hogy a w pont a D halmaznak

- belső pontja, ha található olyan $r > 0$, hogy $B(w, r) \subset D$,
- külső pontja, ha található olyan $r > 0$, hogy $B(w, r) \subset \mathbb{C} \setminus D$,
- határpontja, ha minden $r > 0$ esetén $B(w, r) \cap D \neq \emptyset$, $B(w, r) \cap (\mathbb{C} \setminus D) \neq \emptyset$.

Azt mondjuk, hogy D nyílt, ha minden pontja belső pont, és D zárt, ha a komplementuma nyílt. A $D \subset \mathbb{C}$ halmaz kompakt, ha minden $z_n \in D$ sorozathoz található n_k indexsorozat és $z \in D$, hogy $z_{n_k} \to z$.

Rögtön látszik a definícióból, hogy zárt halmaz az, amely tartalmazza összes határpontját. A múlt félévben bizonyítottakhoz teljesen azonos módon látható, hogy egy D halmaz pontosan akkor zárt, ha nem lehet belőle kikonvergálni, azaz ha $z_n \in D$, $z_n \to z$, akkor $z \in D$. Bolzano-Weiarstraß tételből egyenesen következik, hogy a komplex számsíkon is pontosan a korlátos és zárt halmazok a kompakt halmazok. Az eddigiekhez hasonlóan $\operatorname{int} D$ jelöli a D halmaz belső pontjaink halmazát, D' a D halmaz torlódási pontjait.

Az állítások megfogalmazása érdekében bevezetünk egy új jelölést. Mint láttuk eddig, és későbbi tanulmányaink során is látni fogjuk, nagyon sok tételnél lényegtelen a tétel kimondása és bizonyítása szempontjából, hogy a valós vagy a komplex számok testében dolgozunk. Ilyenkor az egységes jelölésmód kedvéért használni fogjuk a $\mathbb{K}$ szimbólumot, ami azt jelenti, hogy tetszés szerint $\mathbb{R}$ is és $\mathbb{C}$ is írható helyette.

2.25. **Definíció.** Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{K}$, azaz $D(f) \subset \mathbb{C}$, $R(f) \subset \mathbb{R}$ vagy $R(f) \subset \mathbb{C}$.

- Azt mondjuk, hogy f folytonos a $z_0 \in D(f)$ pontban, ha bármely $z_n \in D(f)$ sorozatra, melyre $z_n \to z_0$, teljesül, hogy $f(z_n) \to f(z_0)$.
- Azt mondjuk, hogy f határértéke a $z_0 \in D(f)'$ pontban a w szám, ha bármely $z_n \in D(f)$ sorozatra, melyre $z_n \to z_0$, teljesül, hogy $f(z_n) \to w$.
- Azt mondjuk, hogy f differenciálható a $z_0 \in \operatorname{int} D$ pontban, ha létezik

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Természetesen a folytonosság és a határérték ekvivalens módon átfogalmazható ε-δ nyelven is. A folytonosság, határérték és differenciálhányados megszokott műveleti azonosságai érvényben maradnak a sorozathatárértékekre vonatkozó tulajdonságok miatt.

Ez az a pont, ahol meg kell említenünk, hogy a hatványsorokkal kapcsolatban minden tétel, amit tanultunk, érvényben marad. Legyen $a_n \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ és

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

- Legyen
$$r := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \left(\frac{1}{+0} = +\infty, \frac{1}{+\infty} = 0\right).$$
Ha $|z - z_0| < r$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ abszolút konvergens, ha $|z - z_0| > r$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ divergens.
- Ha $D(f) = B(z_0, r)$, akkor f folytonos és tetszőlegesen sokszor differenciálható, deriváltjai a tanult módon számíthatók ki.
- Érvényes az Abel tétel is, azaz ha $|z_1 - z_0| = r$ és $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1 - z_0)^n$ konvergens, akkor f folytonosan terjed ki a z_1 pontra és $f(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1 - z_0)^n$.

Az egyetlen technikai nehézség, hogy a z_0 pont r sugarú környezetének határa már nem csak két pontból áll. Itt kell megemlíteni, hogy a hatványsorok lehetőséget adnak arra, hogy néhány jól ismert függvény definícióját kiterjesszük a komplex számok körébe.

A legegyszerűbb példával kezdjük. Világos, hogy ha $|z| < 1$, akkor

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Ennek analógiájára mondhatjuk, hogy **legyen**

$$\begin{aligned} \exp z = e^z &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \\ \sin z &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \cos z &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Ez természetesen különösebb szemléletes tartalom nélkül annak a filozófiának a továbbgörgetése, hogy a trigonometrikus (és az exponenciális) függvényt definiálhatjuk hatványsorával.

Lássuk néhány következményét annak, ha bevezetjük ezeket a definíciókat.

- sin, cos és exp mindenhol definiált, tetszőlegesen sokszor differenciálható függvények, melyekre $\exp' = \exp$, $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$.
- Az addíciós azonosságok érvényben maradnak (lásd Cauchy szorzatos bizonyítások, Károlyi Katalin anyaga), azaz
$$\begin{aligned} e^{z+w} &= e^z e^w \\ \sin(z+w) &= \sin z \cos w + \cos z \sin w \\ \cos(z+w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w. \end{aligned}$$
- $$e^{iz} = \cos z + i \sin z \qquad z \in \mathbb{C},$$
és speciálisan $e^{i\pi} = -1$.
- exp periodikus függvény lesz $2\pi i$ (komplex!) periódussal, hiszen
$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z.$$

Ha $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, akkor a múlt félévben tanult fogalmak és tételek közül csak igen keveset hasznosíthatunk, hiszen nincs rendezés, így se monotonitásról, se szélsőértékről, se középértéktételekről nem beszélhetünk. Ha viszont $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, akkor, bár monotonitásról szintén nem lehet szó, de legalább szélsőértékekről beszélhetünk.

2.26. Tétel (Weierstraß)**.** *Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ és legyen $D(f)$ kompakt. Ekkor f felveszi minimumát és maximumát.*

A bizonyítás szóról szóra megegyezik a múlt félévi jegyzetben szereplővel. Komplex változójú függvényekkel kapcsolatos fejtegetéseinket egy kiruccanással zárjuk az algebra területére.

2.27. Tétel (Az algebra alaptétele)**.** *Minden legalább elsőfokú komplex polinomnak van zérushelye.*

Bizonyítás. Legyen

$$p(z) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, \qquad a_k \in \mathbb{C},\, a_n \neq 0.$$

Mivel $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény, vizsgáljuk helyette a $|p| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ függvényt, aminek lehet a szélsőértékeiről beszélni.

Jelölje

$$\mu := \inf_{z \in \mathbb{C}} |p(z)| \geq 0.$$

Mivel

$$\lim_{|z| \to \infty} |p(z)| = \infty,$$

(miért?), ezért található $r > 0$, hogy $|p(z)| > \mu$ ha $|z| > r$. Tehát

$$\mu = \inf_{|z| \leq r} |p(z)| \geq 0.$$

Mivel

$$K := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \leq r\}$$

kompakt halmaz, hiszen korlátos és zárt, található olyan $z_0 \in K$, hogy $\mu = p(z_0)$. Azt kell megmutatnunk, hogy $\mu = 0$.

Indirekt, tegyük fel, hogy $\mu > 0$ és legyen

$$q(z) := \frac{p(z + z_0)}{p(z_0)}.$$

A feltételek szerint $q(0) = 1$, q egy n-ed fokú polinom és $|q(z)| \geq 1$. Tehát a q polinom bevezetésével a $\mu > 0$ számot 1-re változtattuk. Ezek alapján írhatjuk, hogy a q polinom

$$q(z) = 1 + b_m z^m + \ldots b_n z^n$$

alakú, ahol $b_m \neq 0$ az első ilyen tulajdonságú együttható. Ilyen van, hiszen $b_n \neq 0$, tehát $1 \leq m \leq n$.

Megmutatjuk, hogy található olyan z szám, hogy $|q(z)| < 1$, ami ellentmondás. Ezt a z számot trigonometrikus alakjában keressük, azaz $z = \rho e^{i\psi}$ alakban.

Mivel $\left|\frac{-|b_m|}{b_m}\right| = 1$, ezért található olyan $\varphi \in \mathbb{R}$, hogy

$$\frac{-|b_m|}{b_m} = \cos\varphi + i \sin\varphi = e^{i\varphi}.$$

Jelölje továbbá

$$\psi := \frac{\varphi}{m},$$

ekkor

$$b_m e^{im\psi} = -|b_m|.$$

Legyen

$$z := \rho e^{i\psi} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi) \qquad (\rho > 0).$$

Célunk most a ρ szám ügyes megválasztása, hogy ellentmondásra jussunk.

Ekkor

$$b_m z^m = \rho^m b_m e^{im\psi} = -\rho^m |b_m|.$$

Ezért

$$|q(z)| = \left|q\left(\rho e^{i\psi}\right)\right| \leq |1 - |b_m|\rho^m| + |b_{m+1}|\rho^{m+1} + \ldots + |b_n|\rho^n,$$

ahol az első két tag kívételével a háromszög-egyenlőtlenséget alkalmaztuk. Ha $0 < \rho^m < \frac{1}{|b_m|}$, akkor $1 - |b_m|\rho^m > 0$, így az első abszolútértékjel elhagyható. Tehát ilyenkor

$$\left|q\left(\rho e^{i\psi}\right)\right| \leq 1 - |b_m|\rho^m + |b_{m+1}|\rho^{m+1} + \ldots + |b_n|\rho^n = 1 - \rho^m\left(|b_m| - |b_{m+1}|\rho - \ldots - |b_n|\rho^{n-m}\right).$$

Mivel $|b_m| > 0$ és polinomfüggvények folytonosak, ezért ha ρ „elég kicsi”, a zárójelben pozitív szám áll. Egy ilyen ρ számra tehát

$$\left|q\left(\rho e^{i\psi}\right)\right| < 1,$$

ami ellentmondás. □

3. A Riemann-integrál

3.1. **Primitív függvények.**

3.2. Riemann-integrál. Az előzőekben láthattuk, hogy a differenciálszámítás megfordítása, a primitív függvény keresés a differenciálás szabályainak megfordításával igen esetleges.

3.3. **Improprius integrál.**

4. Függvénysorozatok, függvénysorok

A hatványsorokkal kapcsolatban előkerül egy általánosabb feladat, amihez általánosítanunk kell a sorozat és a határérték fogalmát.

4.1. Definíció. Legyen $D(f_n) = I$ intervallum, $f_n : I \to \mathbb{K}$ $(n \in \mathbb{N})$. Az (f_n) függvénysorozat *konvergenciatartománya*

$$K := \left\{x \in I \,:\, \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x)\right\},$$

limeszfüggvénye

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad D(f) := K$$

függvény. Hasonlóan, az $s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_n(x)$ képlettel definiált függvény a $\sum(f_n)$ függvénysor n-edik fészletösszege, a függvénysor összegfüggvénye pedig

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

ahol értelmezve van.

4.2. *Példa.* (1)

$$D(f_n) = \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n \text{ esetén } K = (-1,1],\ f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1,1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

(2)

$$D(g_n) = \mathbb{R},\ g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \text{ esetén } K = (-1,1),\ g(x) = \frac{1}{1-x}$$

(3)

$$D(h_n) = \mathbb{R},\ h_n(x) = (1-x^2)^n \text{ esetén } K = (-1,1),\ h(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1,1), x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

(4)

$$D(j_n) = \mathbb{R},\ j_n(x) = \frac{1}{n}\sin nx \text{ esetén } K = \mathbb{R},\ j(x) = 0$$

(5) Legyen $D(k_n) = [0,1]$, $k_n(0) = k_n(\frac{2}{n}) = k_n(1) = 0$, $k_n(\frac{1}{n}) = n$ és k_n legyen lineáris a $[0, \frac{1}{n}]$, $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ és az $[\frac{2}{n}, 1]$ intervallumokon. Ekkor $K = [0,1]$ és $k(x) = 0$.

(6) Legyen $D(l_n) = [0,1]$ és jelölje (q_n) a $[0,1]$ intervallumba eső racionális számok egy felsorolását. Legyen

$$l_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{q_1, q_2, \cdots, q_n\}, \\ 0, & x \in [0,1],\, x \neq q_1, q_2, \cdots, q_n. \end{cases}$$

Ekkor $K = [0,1]$ és $l(\cdot)$ a Dirichlet függvény, azaz

$$l(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Hatványsoroknál láttuk, hogy őket lehetett tagonként differenciálni és integrálni, azaz a deriválás és a határértékképzés, valamint az integrálás és a határértékképzés műveletei felcserélhetőek voltak. Sajnos az előző példák jól mutatják, hogy ha nem hatványsorokról, hanem általánosabb függvénysorozatokról és függvénysorokról van szó, akkor ilyesmiben nem reménykedhetünk. Az első és a harmadik példa mutatja, hogy a folytonosság és így a differenciálhatóság nem feltétlen marad meg. A negyedik példánál látjuk, hogy bár a határfüggvény differenciálható, a deriváltak sorozata nem tart a határfüggvény deriváltjához. Az ötödik példánál látjuk, hogy a Riemann integrálok sorozata, a konstanans 1 sorozat, nem tart a határfüggvény integráljához. Végül az utolsó példánál azt látjuk, hogy Riemann integrálható függvények egy nem Riemann integrálható függvényhez tartanak. Ez utóbbi a Lebesgue kritériumból következik, hiszen l_n véges sok helyen szakad, és véges halmaz nullmértékű.

Tehát ahhoz, hogy a hatványsoroknál látottakhoz hasonlót tudjunk elvárni általános függvénysorozatoktól, a konvergencia fogalmát kell megszigorítani. Egy lehetséges és elterjedt szigorítás a következő.

4.3. **Definíció.** Legyen $D(f_n) = D(f) = H \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat *egyenletesen konvergál (tart)* az f függvényhez, szimbólummal: $f_n \rightrightarrows f$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz található $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy bármely $n \geq N$ és $x \in H$ esetén

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Analóg módon definiálható függvénysor egyenletes konvergenciája. A továbbiakban, ha hangsúlyozni szeretnénk, hogy függvénysorozat konvergenciája nem feltétlenül egyenletes, akkor pontonkénti konvergenciát írunk.

A leglényegesebb különbség a pontonkénti és az egyenletes konvergencia definíciói között, hogy az $(f_n(x))$ számsorozatnál $\varepsilon > 0$ számhoz talált N küszöbindex függ-e az x helytől vagy sem.

Könyen meggondolható, hogy az egyenletes konvergencia erősebb, mint a pontonkénti konvergencia.

4.4. **Állítás.** *Ha (f_n) egyenletesen tart f-hez, akkor pontonként is.*

Szintén nem nehéz a Cauchy féle konvergenciakritériumot megfogalmazni egyenletes konvergenciára.

4.5. **Állítás** (Cauchy kritérium)**.** *Az (f_n) függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens a H halmazon, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén található $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n, m \geq N$ esetén*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Ha $(f_n) \rightrightarrows f$, akkor legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges és válasszuk a N küszöbindexet úgy, hogy bármely $n \geq N$ és $x \in H$ esetén

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

A háromszög-egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk, hogy ha $n, m > N$, akkor

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Megfordítva, ha teljesül a Cauchy kritérium, akkor rögzített x esetén $(f_n(x))$ Cauchy sorozat, így található olyan $f : H \to \mathbb{K}$, hogy (f_n) tart az f függvényhez pontonként.

Rögzített $\varepsilon > 0$ számhoz válasszuk a $N \in \mathbb{N}$ küszöbindexet úgy, hogy minden $n, m \geq N$ és minden $x \in H$ esetén

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ha ebben az egyenlőtlenségben $m \to \infty$, akkor látjuk, hogy bármely $n \geq N$ és minden $x \in H$ esetén

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

□

Függvénysorok esetén egyenletes konvergencia jól eldönthető a következő elégséges feltétel segítségével.

4.6. **Állítás** (Weierstraß kritérium). *Legyen $D(f_n) = H \subset \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy találhatóak (M_i) számok, hogy minden $x \in H$ esetén*

$$|f_i(x)| \leq M_i.$$

Ha

$$\sum_{i=0}^{\infty} M_i < \infty,$$

akkor a $\sum(f_n)$ függvénysor egyenletesen konvergens.

Bizonyítás. Az állítás Cauchy kritériumból következik. Legyen

$$s_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i(x).$$

Tetszőleges $x \in H$ és $m > n$ esetén

$$|s_n(x) - s_m(x)| = \left| \sum_{i=n+1}^{m} f_i(x) \right| \leq \sum_{i=n+1}^{m} |f_i(x)| \leq \sum_{i=n+1}^{m} M_i.$$

Ebből a numerikus sorokra vonatkozó Cauchy ktritérium használatával lehet a bizonyítást befejezni. □

4.7. *Példa.*

- Legyen $\sum(a_n(x - x_0)^n)$ egy egy $r > 0$ pozitív konvergenciasugarú hatványsor. Ha $0 < R < r$, akkor a hatványsor egyenletesen konvergens az $[x_0 - R, x_0 + R]$ intervallumon, hiszen

$$|a_n(x - x_0)^n| \leq |a_n(R - x_0)^n|$$

minden $x \in [x_0 - R, x_0 + R]$ pontra, és a feltétel szerint

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(R - x_0)^n$$

konvergens.
- A

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

függvénysor egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$-en, hiszen $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Rátérhetünk annak vizsgálatára, hogy milyen előnyünk származik az egyenletes konvergencia fogalmának bevezetésével.

4.8. **Tétel.** *Legyen $D(f_n) = D(f) = H$, $f_n \rightrightarrows f$, valamint legyen $a \in H'$ és létezzen*

$$\lim_{x \to a} f_n(x) := b_n$$

minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra. Ekkor a b_n sorozat konvergens, és használva a $b := \lim(b_n)$ jelölést, teljesül, hogy

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Másképp kifejezve a tétel azt fejezi ki, hogy egyenletes konvergencia esetén a két határértékképzés felcserélhető, azaz

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to a} f_n(x) = \lim_{x \to a} \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges és válasszuk hozzá $N \in \mathbb{N}$ küszöbindexet úgy, hogy minden $n, m \geq N$ és minden $x \in H$ esetén

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1}$$

Ebből $x \to a$ határátmenettel kapjuk, hogy

$$|b_n - b_m| \leq \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon, \tag{2}$$

azaz hogy a (b_n) sorozat Cauchy sorozat. Legyen $b := \lim(b_n)$. A (2) összefüggésből $m \to \infty$ határátmenettel kapjuk továbbá, hogy

$$|b_N - b| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Kihasználva azt a feltételt is, hogy $\lim_{x \to a} f_N(x) = b_N$, kapjuk, hogy $\frac{\varepsilon}{3}$-hoz található olyan $\delta > 0$, hogy bármely $x \in B(a, \delta) \cap H$ esetén

$$|f_N(x) - b_N| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

Végül (1) összefüggésből $m \to \infty$ határátmenettel kapjuk, hogy

$$|f_N(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{4}$$

bármely $x \in H$ esetén.

Összefoglalva, (2), (3) és (4) összefüggések alapján $\varepsilon > 0$ számhoz találtunk olyan $\delta > 0$ számot, hogy bármely $x \in B(a, \delta) \cap H$ esetén

$$|f(x) - b| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - b_N| + |b_N - b| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

□

Megfogalmazhatjuk a folytonosságra vonatkozó következményt.

4.9. **Következmény.** *Legyen $D(f_n) = D(f) = H$ és $a \in \operatorname{int} H$. Ha f_n folytonos az a pontban minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor f is folytonos az a pontban.*

Az egyenletes konvergencia az integrálok vizsgálatánál is beválik.

4.10. **Tétel.** *Legyen $D(f_n) = D(f) = [a, b]$ intervallum és tegyük fel, hogy $f_n \in R[a, b]$. Ha $f_n \rightrightarrows f$, akkor $f \in R[a, b]$ és*

$$\int_a^b f_n \to \int_a^b f.$$

Bizonyítás. Adott $\varepsilon > 0$ számhoz legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, melyre bármely $n, m \geq N$ és minden $x \in [a, b]$ esetén

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \tag{5}$$

Ekkor az

$$I_n := \int_a^b f_n(x)dx$$

jelöléssel

$$|I_n - I_m| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f_m(x))dx \right| \leq \varepsilon(b - a).$$

Ebből látszik, hogy az (I_n) sorozat Cauchy sorozat, jelölje $I := \lim(I_n)$. Véve $m \to \infty$ határátmenetet kapjuk, hogy

$$|I_N - I| \leq \varepsilon(b - a). \tag{6}$$

Mivel f_N integrálható az $[a, b]$ intervallumon, ezért bármely $\varepsilon > 0$ számhoz találhtó $\delta > 0$, hogy minden olyan Z felbontásra, melyre $|Z| < \delta$ és tetszőleges hozzá tartozó $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_s, \ldots, \xi_n)$ osztópontvektorra

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f_N(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I_N \right| < \varepsilon.$$

Másrészt az egyenletes konvergencia (5) összefüggéséből $m \to \infty$ határátmenettel kapjuk, hogy

$$|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon$$

minden $x \in [a, b]$ számra. Ebből következik, hogy bármely δ-nál finomabb Z felbontásra

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f_N(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right| \le \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i) - f_N(\xi_i)|(x_i - x_{i-1}) \le \varepsilon(b - a).$$

Végül nincs más dolgunk, mint hogy összegezzük, amit kaptunk. Minden Z felbontásra, melyre $|Z| < \delta$ és tetszőleges hozzá tartozó $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_s, \dots, \xi_n)$ osztópontvektorra

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I\right| &\le \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f_N(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right| \\ &+ \left|\sum_{i=1}^{n} f_N(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I_N\right| + |I_N - I| < \varepsilon(b-a) + \varepsilon + \varepsilon(b-a),\end{aligned}$$

ami δ megfelelő megválasztásával tetszőlegesen kicsivé tehető. Tehát f Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon és integrálja I-vel egyenlő. □

Láttuk az előző tételeknél, hogy az egyenletes konvergencia a folytonosság és a Riemann-integrálhatóság szempontjából ideálisan viselkedik. A differenciálhatósággal kapcsolatban viszont óvatosságra kell, hogy intsen a bevezetőben látott negyedik példa: j_n egyenletesen konvergál az azonosan nulla függvényhez, deriváltfüggvényei viszont nem konvergálnak. Tehát a folytonossághoz és a Riemann-integrálhatósághoz hasonlót nem lehet a differenciálhatóságról mondani. A hatványsorok példája viszont mutatja, hogy a helyzet nem teljesen reménytelen.

4.11. **Tétel.** *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, f_n differenciálható I-ben, $a \in I$, az $(f_n(a))$ számsorozat legyen konvergens és tegyük fel, hogy a deriváltak (f_n') sorozata I-n egyenletesen tart egy g függvényhez. Ekkor*

(a) (f_n) pontonként tart egy f függvényhez I-n.
(b) Ha I véges, akkor (f_n) konvergenciája egyenletes.
(c) f differenciálható és $f' = g$.

Bizonyítás. Tetszőleges $\eta > 0$ számhoz válasszuk a $N \in \mathbb{N}$ indexet úgy, hogy bármely $m, n \ge N$ esetén minden $x \in I$ helyen

$$|f_n'(x) - f_m'(x)| < \eta$$

és

$$|f_n(a) - f_m(a)| < \eta.$$

Ekkor Lagrange középértéktételt alkalmazva a $h = f_n - f_m$ függvényre kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f_m(x)| &\le |(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(a) - f_m(a))| + |f_n(a) - f_m(a)| \\ &= |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| \cdot |x - a| + |f_n(a) - f_m(a)| < \eta(|x - a| + 1).\end{aligned}$$

Ebből látszik, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz ha $\eta < \frac{\varepsilon}{|x-a|+1}$, akkor η-hoz az előbbiek szerint választott küszöbindexszel minden $n, m > N$ esetén

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \tag{7}$$

teház az $(f_n(x))$ sorozat egy Cauchy sorozat minden $x \in I$ esetén. Jelölje limeszfüggvényét f. A N küszöbindex általában függhet az x helytől, hiszen az η függött x-től. Így a konvergencia nem feltétlenül egyenletes.

Ha viszont I véges intervallum, akkor található olyan $M > 0$ szám, hogy $|x - a| < M$ minden $x \in I$ esetén. Így $\eta < \frac{\varepsilon}{M+1}$ választással (7) minden $x \in I$ esetén teljesül, így a konvergencia egyenletes.

Az utolsó állítás igazolásához a bizonyítás kulcsa az

$$\left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - g(x)\right| \le \left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - \frac{f_N(y) - f_N(x)}{y - x}\right| + \left|\frac{f_N(y) - f_N(x)}{y - x} - f_N'(x)\right| + |f_N'(x) - g(x)|$$

egyenlőtlenség lesz. Megmutatjuk, hogy a N és az y számokat ügyesen válaszva ez tetszőlegesen kicsivé tehető.

Válasszuk $N \in \mathbb{N}$ számot ismét úgy, hogy $m, n \geq N$ esetén minden $x \in I$ helyen

$$|f'_n(x) - f'_m(x)| < \eta$$

teljesüljön. Ekkor $m \to \infty$ határátmenettel kapjuk, hogy minden $x \in I$ esetén

$$|f'_N(x) - g(x)| \leq \eta.$$

Legyen $m > N$ és alkalmazzuk a Lagrange középértéktételt a $h = f_m - f_N$ függvényre és tetszőleges $x, y \in I$, $x \neq y$ pontra. Ez azt jelenti, hogy

$$\left|\frac{f_m(y) - f_m(x)}{y - x} - \frac{f_N(y) - f_N(x)}{y - x}\right| = \left|\frac{(f_m(y) - f_N(y)) - (f_m(x) - f_N(x))}{y - x}\right| = |f'_m(\xi_m) - f'_N(\xi_m)| < \eta.$$

Ebből $m \to \infty$ határátmenettel kapjuk, hogy

$$\left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - \frac{f_N(y) - f_N(x)}{y - x}\right| \leq \eta.$$

Végül tudjuk, hogy f_N differnciálható az I intervallumban, így az $x \in I$ pontban is, azaz $\eta > 0$ számhoz található $\delta > 0$, hogy bármely $y \in B(x, \delta) \cap I$ esetén

$$\left|\frac{f_N(y) - f_N(x)}{y - x} - f'_N(x)\right| < \eta.$$

Összefoglalva, adott $x \in I$ esetén bármely $\eta > 0$ számhoz található olyan $\delta > 0$, hogy ha $y \in B(x, \delta) \cap I$, akkor

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - g(x)\right| \leq & \left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - \frac{f_N(y) - f_N(x)}{y - x}\right| \\ & + \left|\frac{f_N(y) - f_N(x)}{y - x} - f'_N(x)\right| + |f'_N(x) - g(x)| < 3\eta.\end{aligned}$$

□

Index