NUMERIKUS SOROZATOK (Vázlatos bizonyításokkal)

1. $\boxed{a_n \to \alpha \;\Rightarrow\; |a_n| \to |\alpha| \quad \alpha \in \overline{\Re}}$ **Biz:** $\varepsilon \in \Re^+$ $\big|\,|a_n| - |\alpha|\,\big| \le |a_n - \alpha| < \varepsilon$ (ha n elég nagy).

2. $\boxed{a_n \to 0 \;\Leftrightarrow\; |a_n| \to 0}$ **Biz:** $\varepsilon \in \Re^+$ $\big|\,|a_n| - 0\,\big| = |a_n - 0| < \varepsilon$ (ha n elég nagy).

3. $\boxed{(a_n)}$ nullsorozat, $\boxed{(b_n)}$ korlátos sorozat $\Rightarrow$ $\boxed{(a_n \cdot b_n)}$ nullsorozat. **Biz:** $|a_n b_n| \le K \cdot |a_n| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$, ha $n \ge M(\varepsilon / K)$.

4. $1 \le \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1} \le \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}+(n-2)}{n} < 1+\frac{2}{\sqrt{n}} \to 1+0$ (rendőrelv) $\Rightarrow$ $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$

5. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad a \in \Re^+}$ **I.** $\exists\, M \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{M} < a < M \Rightarrow$ ha $n \ge M$, akkor $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n} \Rightarrow \sqrt[n]{a} \to 1$ (rendőrelv)

vagy másképpen bizonyítva: **II.** $a \ge 1 \Rightarrow 1 \le \sqrt[n]{a} \le \frac{a+n-1}{n} < 1+\frac{a}{n} \to 1$; $a<1 \Rightarrow \frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{a}} \to 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} \to 1$.

6*. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad a \in \Re}$ 2. miatt elegendő $a \ge 0$ esetére bizonyítani: $\exists\, M \in \mathbb{N}$ $a \le M \Rightarrow$ ha $n > M$, akkor $0 \le \frac{a^n}{n!} =$

$= \frac{a^M}{M!}\cdot\frac{a^{n-M}}{(M+1)(M+2)\ldots n} = \frac{a^M}{M!}\cdot\frac{a}{M+1}\cdot\frac{a}{M+2}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{n} \le \frac{a^M}{M!}\cdot\frac{a}{n} \to 0$, így a rendőrelv szerint $\frac{a^n}{n!} \to 0$.

7. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a^n = 0 \;\Leftrightarrow\; |a| < 1}$ $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a^n = 1 \;\Leftrightarrow\; a = 1}$ $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty \;\Leftrightarrow\; a > 1}$ $\boxed{(a^n) \text{ divergens} \;\Leftrightarrow\; a \le -1}$

Legyen $0 < a < 1$, ekkor (a^n) szig.mon.fogyó. Ha lenne $\delta > 0$ alsó korlátja, akkor $\sqrt[n]{\delta} \le a$ lenne minden n-re, ami 5.miatt e.m.

8*. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^k a^n = 0 \quad |a| < 1,\; k \in \mathbf{N}}$ 2. miatt elegendő $a > 0$ esetére bizonyítani. A sorozat valamely tagtól kezdődően szig.mon.fogyó, u.i. egymást követő tagjainak hányadosa $a < 1$ -hez konvergál: $\frac{(n+1)^k a^{n+1}}{n^k a^n} = (1+\frac{1}{n})^k \cdot a \to 1 \cdot a < 1$. Ha ezen indextől kezdődő szig.mon.fogyó tagoknak lenne $\delta > 0$ alsó korlátja, akkor ezen összes n-re $\delta \le n^k a^n$, s így $\sqrt[n]{\delta} \le (\sqrt[n]{n})^k a$ lenne, amiből $n \to +\infty$ esetén $1 \le a$ következne, ami ellentmondás. A legnagyobb alsó korlát, a sorozat határértéke tehát 0.

9. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e}$ $\sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n})^n} < \frac{(n+1)+1}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1} \Rightarrow (1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} \Rightarrow$ a sorozat sz.mon.nő,

$\sqrt[n+2]{(1+\frac{1}{n})^n \cdot \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} < \frac{(n+1)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+2} = 1 \Rightarrow (1+\frac{1}{n})^n < 4 \Rightarrow$ a sorozat korlátos; $\Rightarrow$ konvergens, határértéke **=:** $\boldsymbol{e}$

10. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} (1-\frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}}$ $(1-\frac{1}{n})^n = (\frac{n-1}{n})^n = \frac{1}{(\frac{n}{n-1})^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}} \xrightarrow{\text{9. és reciprok}} \frac{1}{e}$

11. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} (1+\frac{r}{n})^n = e^r \quad r \in \mathbf{Q}}$ Ha $r := k$ pozitív egész, akkor $\sqrt[n+1]{(1+\frac{k}{n})^n} < \frac{(n+k)+1}{n+1} = 1+\frac{k}{n+1} \Rightarrow (1+\frac{k}{n})^n <$

$< (1+\frac{k}{n+1})^{n+1}$, és $\sqrt[n+k+1]{(1+\frac{k}{n})^n \cdot \frac{1}{k+1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{k+1}} < \frac{(n+k)+\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{k+1}}{n+k+1} = 1 \Rightarrow (1+\frac{k}{n})^n < (k+1)^{k+1}$, azaz a sorozat szig.mon. nő és korlátos $\Rightarrow$ konvergens, határértéke pedig az $n \mapsto k \cdot n$ indexsorozatnak megf. részsorozat szerint:

$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{k}{n})^n = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{k}{kn})^{kn} = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^{kn} = \lim_{n\to\infty} \left((1+\frac{1}{n})^n \right)^k = e^k$. (**megj:** a korlátosság bizonyítása valójában felesleges, hiszen a monotonitás és egyetlen részsorozat konvergenciája már elégséges feltétele a konvergenciának!).

Negatív esetre: $(1-\frac{k}{n})^n = (\frac{n-k}{n})^n = \frac{1}{(\frac{n}{n-k})^n} = \frac{1}{(1+\frac{k}{n-k})^{n-k}} \cdot \frac{1}{(1+\frac{k}{n-k})^k} \xrightarrow{\text{részs., recipr.}} \frac{1}{e^k} \cdot 1 = e^{-k}$.

Ha $r := \frac{p}{q}$, $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$, akkor $\lim_{n\to\infty} (1+\frac{r}{n})^n = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{p}{qn})^n = \lim_{n\to\infty} \left((1+\frac{p}{qn})^{qn} \right)^{\frac{1}{q}} \overset{12.}{=} \sqrt[q]{e^p} = e^r$.

12. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A \quad \textbf{és} \quad \forall n\in\mathbf{N}\ a_n \ge 0}$ $\boxed{\Rightarrow}$ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A} \quad (\textbf{vagy}\ +\infty, \textbf{ ha } A=+\infty) \quad k\in\mathbf{N}}$ (k rögzített !)

Ha $A=0$, akkor $\varepsilon\in\Re^+$ $\exists M\in\mathrm{N}$ $n\ge M \Rightarrow a_n = |a_n - 0| < \varepsilon^k$, s így $n\ge M$ esetén $\left|\sqrt[k]{a_n} - 0\right| = \sqrt[k]{a_n} < \varepsilon$.

$$A>0 \Rightarrow 0 \le \left|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{A}\right| = \frac{|a_n - A|}{\left(\sqrt[k]{a_n}\right)^{k-1} + \left(\sqrt[k]{a_n}\right)^{k-2}\sqrt[k]{A} + \left(\sqrt[k]{a_n}\right)^{k-3}\left(\sqrt[k]{A}\right)^2 + \ldots + \sqrt[k]{a_n}\left(\sqrt[k]{A}\right)^{k-2} + \left(\sqrt[k]{A}\right)^{k-1}} \le \frac{|a_n - A|}{\left(\sqrt[k]{A}\right)^{k-1}},$$

s mivel $|a_n - A| \to 0$, a rendőrelv alapján $\left|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{A}\right| \to 0$. $A=+\infty$ esetén $\dfrac{1}{a_n}\to 0 \Rightarrow \sqrt[k]{\dfrac{1}{a_n}} \to 0 \Rightarrow \sqrt[k]{a_n} \to +\infty$.

13. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A}$ $\boxed{\Rightarrow}$ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^n = 0, \text{ ha } |A|<1}$, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^n = +\infty, \text{ ha } A>1}$, $\boxed{(a_n^n) \text{ nincs hat.ért., ha } A<-1}$

$A=+1$, különböző pld: $a_n := \sqrt[n]{q}$ $a_n^n \to q$ $(q\in\Re^+)$; $a_n := \sqrt[n]{n}$ $a_n^n \to +\infty$; $a_n := \sqrt[n]{2}$ (n ps), $\sqrt[n]{3}$ (n ptl), (a_n^n) nincs h.é.

$A=-1$ esetére példák: $a_n := \dfrac{-1}{\sqrt[n]{n}}$ $a_n^n \to 0$; $a_n := -\sqrt[n]{2}$ (a_n^n) nincs határérték; $a_n := -\sqrt[n]{n}$ (a_n^n) nincs határérték.

Biz.: Ha $|A|<1$, akkor $\exists\ 0<q<1$ $\exists M\in\mathbf{N}$ $n\ge M \Rightarrow |a_n| < q$, így $n\ge M \Rightarrow \left|a_n^n\right| < q^n$, s emiatt $a_n^n \to 0$ (rendőrelv).

Ha $A>1$, akkor $\exists\, q>1$ $\exists M\in\mathbf{N}$ $n\ge M \Rightarrow a_n > q$, így $n\ge M$ esetén $a_n^n > q^n$, s emiatt $a_n^n \to +\infty$ (rendezés, geom.s.)

Ha $A<-1$, akkor $\exists\, q<-1$ $\exists M\in\mathbf{N}$ $n\ge M \Rightarrow a_n < q$, így $n\ge M$ esetén a_n^n váltakozó előjelű, és nincs h.é. u.i. $\left|a_n^n\right| \to +\infty$.

14. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A \quad \forall n\in\mathbf{N}\ a_n\ge 0}$ $\boxed{\Rightarrow}$ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1, \quad \text{ha } A\in\Re^+}$ ($A=0$ pl: $\sqrt[n]{\dfrac{1}{n^n}} \to 0$; $\sqrt[n]{\dfrac{1}{2^n}} \to \dfrac{1}{2}$; $\sqrt[n]{\dfrac{1}{n}} \to 1$).

Biz.: $\exists M\in\mathrm{N}$ $n\ge M \Rightarrow \dfrac{A}{2} < a_n < \dfrac{3A}{2}$, így $n\ge M$ esetén $\sqrt[n]{\dfrac{A}{2}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\dfrac{3A}{2}}$, s emiatt $\sqrt[n]{a_n} \to 1$ (rendőrelv).

15. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A \quad (a_n\in\Re^+ \text{ minden } n\text{-re})}$ $\boxed{\Rightarrow}$ $\boxed{(a_n) \text{ számt., mért., harm. kp. sorozataira: } s_n\to A,\ g_n\to A,\ h_n\to A}$

I. $A\in\Re$: $\varepsilon\in\Re^+$ $\exists M\in\mathrm{N}$ $n\ge M \Rightarrow$ $|a_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ és $\dfrac{|a_1 - A| + |a_2 - A| + \ldots + |a_M - A|}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, így $n>M$ esetén

$$|s_n - A| = \left|\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} - A\right| = \left|\frac{a_1 - A + a_2 - A + \ldots + a_n - A}{n}\right| \le \frac{|a_1 - A| + \ldots + |a_M - A| + \ldots + |a_n - A|}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n\varepsilon}{2n} = \varepsilon$$

II. Ha $A=0$, akkor $0<h_n\le g_n\le s_n \to 0$ miatt a rendőrelv alapján $h_n\to 0$ és $g_n\to 0$. Ha $A>0$, akkor $\dfrac{1}{a_n}\to\dfrac{1}{A}$,

így $\dfrac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{n} \to \dfrac{1}{A}$, s emiatt a reciprok sorozatra: $h_n \to A$, és $h_n\le g_n\le s_n \to A$ miatt $g_n\to A$ (rendőrelv).

III. Ha $A=+\infty$, akkor $\dfrac{1}{a_n}\to 0$, így $\dfrac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{n} \to 0$, melyből $h_n\to+\infty$, és $h_n\le g_n\le s_n$ miatt g_n és $s_n \to +\infty$.

16. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0}$ Az $\dfrac{1}{n} \to 0$ sorozat mértani közép sorozata is nullsorozat, azaz $\sqrt[n]{\dfrac{1}{n!}} \to 0$.

17. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e}$ Az $(1+\dfrac{1}{n})^n \to e$ sorozat mértani közép sorozata : $\sqrt[n]{\dfrac{1+1}{1}\cdot\dfrac{(2+1)^2}{2^2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}\cdot\dfrac{(n+1)^n}{n^n}} =$

$$= \sqrt[n]{\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{(n+1)^n}{n}} = \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \to e, \quad \text{és így} \quad \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{n}{n+1} \to e\cdot 1 = e .$$

*(18.) **Példa:** $\boxed{a_n := \dfrac{n!}{n^n}}$ $\sqrt[n]{a_n} = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to \dfrac{1}{e} < 1 \Rightarrow a_n = (\sqrt[n]{a_n})^n \to 0$. **Másként:** $0 < \dfrac{n!}{n^n} \le \dfrac{1}{n} \to 0$ és rendőrelv.

6. és 8. más biz. (ha $a\ge 0$): $\sqrt[n]{a_n} = \dfrac{a}{\sqrt[n]{n!}} \to 0 \Rightarrow a_n = (\sqrt[n]{a_n})^n \to 0$; $\sqrt[n]{a_n} = (\sqrt[n]{n})^k\cdot a \to a<1 \Rightarrow a_n = (\sqrt[n]{a_n})^n \to 0$.