**45.o feladat:** **Függvényvizsgálat..**

1. $f(x) := \ln \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1}$ , $D(f) = \mathbf{R} \setminus [1, 2]$ . Nullhelyek: $f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2-3x+2 = x^2+1 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{3}$ ,

Határértékek: (ahol $f$ nem folyt. v. nem ért.) $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = -\infty$ , $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = -\infty$ , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -0$ , $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +0$ .

2. Monotonitás, szélsőértékek: $f'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-3x+2} \cdot \dfrac{(2x-3)\cdot(x^2+1)-(x^2-3x+2)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{3x^2-2x-3}{(x^2-3x+2)\cdot(x^2+1)}$ ,

$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{1-\sqrt{10}}{3}$ (a sz. másik gyöke $\notin D(f)$ ). $f'(x) < 0$ , ha $\dfrac{1-\sqrt{10}}{3} < x < 1$ és $f'(x) > 0$ , ha $x < \dfrac{1-\sqrt{10}}{3}$ v. $x > 2$

$\Rightarrow f$ szig. mon. fogyó a $\left(\dfrac{1-\sqrt{10}}{3}, 1\right)$ intervallumon, szig. mon. növő a $\left(-\infty, \dfrac{1-\sqrt{10}}{3}\right)$ és $(2, +\infty)$ intervallumokon,

$\Rightarrow$ az $x = \dfrac{1-\sqrt{10}}{3}$ helyen $f$ -nek globális maximuma van, $f\left(\dfrac{1-\sqrt{10}}{3}\right) \approx 1.2$ .

3. Értékkészlet: $f$ monoton szakaszainak és határértékeinek ismeretében: $R(f) = \left(-\infty, f\left(\dfrac{1-\sqrt{10}}{3}\right)\right] \approx (-\infty, 1.2\,]$ .

4. Konvexitás, konkávitás, inflexió: $f''(x) =$

$$= \frac{(6x-2)\cdot(x^2-3x+2)\cdot(x^2+1)-(3x^2-2x-3)\cdot\Big((2x-3)\cdot(x^2+1)+(x^2-3x+2)\cdot 2x\Big)}{(x^2-3x+2)^2\cdot(x^2+1)^2}$$ , s a számlálót $g(x)$ -szel jelölve:

$g(x) = (6x-2)\cdot(x^4-3x^3+3x^2-3x+2)-(3x^2-2x-3)\cdot(4x^3-9x^2+6x-3) = -6x^5+15x^4-30x^2+30x-13$ ,

$g'(x) = -30x^4+60x^3-60x+30 = -30\cdot(x^4-2x^3+2x-1) = -30\cdot((x^4-1)-2x\cdot(x^2-1)) = -30\cdot(x^2-1)\cdot(x-1)^2$ ,

melyből látható, hogy $g' < 0$ a $(-\infty, -1)$ és $(1, +\infty)$ intervallumokon, így ezeken $g$ szig.mon.fogyó, s $g' > 0$ a $(-1, 1)$ intervallumon, így itt $g$ szig.mon.növő. Tehát $g$ -nek a $-1$ helyen lok.minimuma, az $1$ helyen pedig lok.maximuma van, s mivel ez: $g(1) = -4$ , nyilvánvaló hogy a $-1$ -nél nem kisebb helyeken $g$ mindenütt negatív. Emiatt $g$ -nek egyetlen zérushelye $(x_0)$ van, melyre $-2 < x_0 < -1$ , hiszen $g(-2)$ már pozitív. Ebből a nevező pozitivitása miatt következik, hogy:

$f''(x) < 0$ , ha $x \in (x_0, 1)$ vagy $x \in (2, +\infty)$ $\Rightarrow$ $f$ szig. konkáv ax $(x_0, 1)$ és a $(2, +\infty)$ intervallumokon,

$f''(x) > 0$ , ha $x \in (-\infty, x_0)$ $\Rightarrow$ $f$ szig. konvex a $(-\infty, x_0)$ intervallumon, inflexió van az $x_0$ pontban.

5. Aszimptoták: $f$ -nek van aszimptotája, ha $\exists \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - m\cdot x - b) = 0 \;\Rightarrow\; m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ , $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx)$ .

Itt $m_{1,2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x}\cdot \ln \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1} = 0$ ,

$b_{1,2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1} = 0$ ,

tehát a $-\infty$ -beli és a $+\infty$ -beli aszimptota egyaránt az $x \mapsto 0$ egyenes.