1. Emlékeztető : (Differenciálhatóság, a derivált folytonossága)

Amikor egy függvény differenciálhatóságát vizsgáljuk egy $u \in D(f) \cap D(f)'$ pontban, hasznos lehet az alábbi **elégséges felt.:**

> **Ha** az f függvény **differenciálható** az $(u, u+r)$ [ill. $(u-r, u)$, $r > 0$] intervallumban, **folytonos** az u-ban, és $\exists \lim\limits_{u+0} f'$ [ill. $\lim\limits_{u-0} f'$] jobb- [ill. bal-] oldali **határérték**, jelöljük ezt α-val,
>
> **akkor** $\exists \lim\limits_{x \to u+0} \dfrac{f(x)-f(u)}{x-u} = \alpha$ [ill. $\exists \lim\limits_{x \to u-0} \dfrac{f(x)-f(u)}{x-u} = \alpha$] .

Bizonyítás : A jobboldali határértékre bizonyítjuk, a baloldali hasonlóképpen bizonyítható. $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ $\exists \delta \in \mathbf{R}^+$, $\delta < r$,

$\forall\, t \in (u, u+\delta)$ $f'(t) \in B(\alpha, \varepsilon)$ $\Rightarrow$ $\forall\, x \in (u, u+\delta)$ $\exists \xi \in (u, x) \subset (u, u+\delta)$ $\dfrac{f(x)-f(u)}{x-u} = f'(\xi)$ $\in B(\alpha, \varepsilon)$. ☻

Következmény : Ha az u helyen folytonos f függvény az u nak valamely környezetében minden u-tól különböző pontban differenciálható és a deriváltnak u-ban véges határértéke van, akkor f az u helyen folytonosan differenciálható, $f'(u) = \lim\limits_{u} f'$.

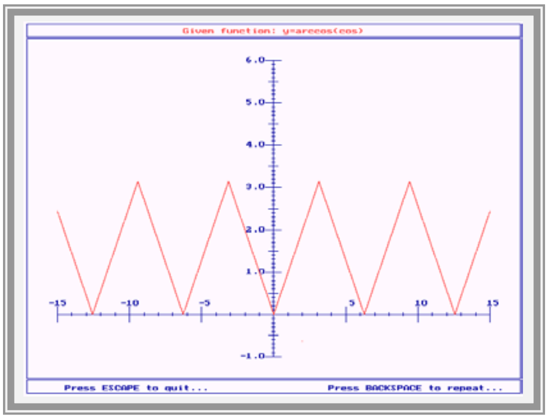
Példa : az $\arccos \circ \cos$ függvény deriváltfüggvényének meghatározásakor, az $u = k \cdot \pi$, $k \in \mathbf{Z}$ helyeken nem alkalmazhatjuk a kompozíció deriválási szabályát, u.i. a $+1$ és -1 helyeken az arccos (külső) függvény nem differenciálható. A fenti tétel alapján viszont könnyen látható, hogy ezeken a helyeken a kompozíciónak az egyoldali deriváltjai léteznek, különbözőségük ($+1$ és -1) miatt azonban a függvény ezeken a helyeken nem differenciálható !

$$\forall\, x \in (\, k\pi, (k+1)\pi \,) \quad (\arccos \circ \cos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} \cdot (-\sin x) =$$

$$= \frac{\sin x}{|\sin x|} = \operatorname{sign}(\sin x) = \begin{cases} 1, & ha\ k\ ps \\ -1, & ha\ k\ ptlan \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad (\arccos \circ \cos)'_+(\,2k\pi\,) = 1\,, \qquad (\arccos \circ \cos)'_-(\,2k\pi\,) = -1\,,$$

$$(\arccos \circ \cos)'_+(\,(2k+1)\pi\,) = -1\,, \quad (\arccos \circ \cos)'_-(\,(2k+1)\pi\,) = 1\,.$$



2. Emlékeztető : (Derivált szakadása)

A Darboux tételből azonnal következik, hogy egy intervallumon differenciálható függvény deriváltjának nem lehet elsőfajú szakadása, tehát ha egy $u \in D(f') = I$ helyen f' nem folytonos, akkor f'-nek legalább az egyik oldali határértéke vagy nem létezik, vagy létezik, de nem véges. A jobbról nem folytonos esetre mutatjuk meg, hogy a szakadás csak másodfajú lehet, a baloldali esetre hasonló az állítás és a bizonyítás.

> Ha az f függvény differenciálható az $[u, u+r)$ intervallumon ($r > 0$), és az f' derivált nem folytonos az u-ban,
> akkor vagy nem létezik a $\lim\limits_{u+0} f'$ jobboldali határérték, vagy $\exists \lim\limits_{u+0} f' \notin \mathbf{R}$.

Bizonyítás : Indirekt. Tegyük fel, hogy $\exists \lim\limits_{u+0} f' = \alpha \in \mathbf{R}$. Mivel f' nem folytonos az u-ban, $f'(u) \neq \alpha$. Igy ha β az $f'(u)$ és α közé eső szám, pl. ha $\alpha < \beta < f'(u)$, akkor a határérték definíciója alapján $\varepsilon := |\beta - \alpha| \in \mathbf{R}^+$-hoz is $\exists \delta \in \mathbf{R}^+$, $\delta < r$, hogy $\forall\, t \in (u, u+\delta)$ $f'(t) \in B(\alpha, \varepsilon)$ $\Rightarrow$ rögzített $v \in (u, u+\delta)$-re tehát $f'(v) \in B(\alpha, \varepsilon)$, $\forall\, t \in (u, v)$ $f'(t) \in B(\alpha, \varepsilon)$, $f'(u) \notin B(\alpha, \varepsilon)$, így a β és $f'(u)$ közé eső számokat f' sehol nem veszi fel az (u, v) intervallumban, ami ellentmondás . ☻

Megj.: A fentiek miatt nyilvánvaló pl., hogy nincsen olyan differenciálható f valós függvény, melynek deriváltfüggvénye az egészrész függvény (*entier*), vagy az előjelfüggvény (*signum*), hiszen ezek olyan függvények, melyeknek elsőfajú szakadásuk van (az egész helyeken, ill. a 0 helyen).

3. Példa : (Taylor sor, összegfüggvény)

Az $\mathbf{R}$ -en értelmezett $f(x) := \mathrm{e}^{-1/x^2}$ $(x \neq 0)$, $f(0) := 0$ hozzárendeléssel definiált függvény végtelen sokszor differenciálható, és a 0-beli deriváltak mindegyike zérus, azaz $\forall n \in \mathbf{N}$ $f^{(n)}(0) = 0$.

Bizonyítás :

Az $x \neq 0$ esetre először belátjuk, hogy $\forall n \in \mathbf{N}$ $\exists\, f^{(n)}(x) = p_{3n}(\frac{1}{x}) \cdot \mathrm{e}^{-1/x^2}$, ahol p_{3n} $3n$ -edfokú polinomfüggvény.

Valóban, $n=1$ -re $f'(x) = \frac{2}{x^3} \cdot \mathrm{e}^{-1/x^2}$, tehát $p_3 = 2\,\mathrm{id}^3$; ha pedig n -re igaz az állítás, akkor az $n+1$ -dik derivált:

$$f^{(n+1)}(x) = p'_{3n}(\tfrac{1}{x}) \cdot (-\tfrac{1}{x^2}) \cdot \mathrm{e}^{-1/x^2} + p_{3n}(\tfrac{1}{x}) \cdot (\tfrac{2}{x^3}) \cdot \mathrm{e}^{-1/x^2} = (-p'_{3n}(\tfrac{1}{x}) \cdot (-\tfrac{1}{x})^2 + 2 \cdot p_{3n}(\tfrac{1}{x}) \cdot (\tfrac{1}{x})^3\,) \cdot \mathrm{e}^{-1/x^2}\ ,$$ melyből

látható (felhasználva, hogy p'_{3n} $3n-1$ -edfokú polinom), hogy e^{-1/x^2} szorzótényezője $\frac{1}{x}$ -nek $3n+3$ fokszámú polinomja.

Az $x=0$ -beli deriváltak létezése és 0 értéke teljes indukcióval bizonyítható, felhasználva $f^{(n-1)}$ 0-beli folytonosságát és a $\lim\limits_{x\to 0} f^{(n)}(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{p_{3n}(\frac{1}{x})}{\mathrm{e}^{1/x^2}} = 0$ határértéket (a számlálóban véges számú $konst \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^{k/2}$ alakú tag összege áll $(k \in \mathbf{N})$, így a tagonként vett hányadosok mindegyikének határértéke 0, (Komp. II. hat.érték, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ belső fgv., $x \mapsto \frac{x^p}{\mathrm{e}^x}$ külső fgv.)). ☻

Következmény: Az $\mathbf{R}$ -en értelmezett $f(x) := \mathrm{e}^{-1/x^2}$ $(x \neq 0)$, $f(0) := 0$ hozzárendeléssel definiált f függvény 0 körüli Taylor sora az egész $\mathbf{R}$ -en konvergens, összegfüggvénye a konstans 0 függvény. f 0 körüli Taylor sora tehát csak egyetlen pontban, a zérus helyen állítja elő a függvényt. (A kifejtési helyen ez egyébként minden függvény esetén nyilvánvaló.)

Megfordítva viszont tudjuk, hogy ha egy hatványsorból indulunk ki, akkor az összegfüggvényének Taylor sora maga a hatványsor, azaz a hatványsor együtthatóit az összegfüggvénye egyértelműen meghatározza (nincsen két különböző hatványsor, melyeknek az összegfüggvénye megegyezik).

Bármely hatványsor összegfüggvényének Taylor sora tehát maga a hatványsor, viszont egy függvény Taylor sorának összegfüggvénye nem feltétlenül maga a függvény.

4. Emlékeztető : (Taylor sor összegfüggvénye)

A Taylor formula következményeként szükséges és elégséges feltétel adható arra, hogy a Taylor sor előállítsa a függvényt:
Valamely I intervallumon végtelen sokszor differenciálható f függvény , $u \in I$ és $x \in I$ esetén :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(u)}{n!} \cdot (x-u)^n \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0\,,$$ ahol $R_n(x) = \dfrac{f^n(\xi)}{n!} \cdot (x-u)^n$ a maradéktag, ξ az u és x közötti érték.

Bizonyítás : Legyen $x \in I$, $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(u)}{n!} \cdot (x-u)^n \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, M \in \mathbf{N} \ \ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geq M \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(u)}{k!} \cdot (x-u)^k \right| = \left| \frac{f^n(\xi)}{n!} \cdot (x-u)^n \right| < \varepsilon\ .$$ ☻

Következmény: Ha az I intervallumon végtelen sokszor differenciálható f függvény deriváltjaihoz $\exists\, K \in \mathbf{R}^+$ hogy $\forall n \in \mathbf{N}$ $\forall x \in I$ $\left| f^{(n)}(x) \right| \leq K$, akkor f bármely $u \in I$ körüli Taylor sora I -ben előállítja a függvényt,

azaz $\forall x \in I$ $\quad f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(u)}{n!} \cdot (x-u)^n$.

Bizonyítás : Legyen $x \in I$. Ekkor $\forall n \in \mathbf{N}$ $\exists \xi$ u és x között, melyre $\left| R_n(x) \right| = \left| \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \cdot (x-u)^n \right| \leq K \cdot \dfrac{|x-u|^n}{n!} \to 0$. ☻

Pl. a sin, cos, sh, ch, exp függvényekre, az $u=0$ helyre és $I = (-r, r)$ intervallumokra alkalmazva $(r \in \mathbf{R}^+)$: $\forall x \in \mathbf{R}$:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}, \quad \mathrm{sh}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}, \quad \mathrm{ch}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} \cdot x^{2n}, \quad \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n .$$