

7. Feladatok : (További példák függvények hatványsorba fejtésével kapcsolatban)

1. Határozzuk meg az $(1 - \text{id})^{-2}$ függvény 0 középpontú Taylor sorát és vizsgáljuk meg ennek konvergenciáját !

I. A **binomiális tétel** szerint, ha $|x| < 1$, akkor $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-2}{n} \cdot (-x)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{(-2) \cdot (-3) \cdot \dots \cdot (-2 - (n-1))}{n!} \cdot x^n =$
 $= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot (-1)^n \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) \cdot x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \cdot x^n \quad (|x| \geq 1 \text{ esetén a sor divergens!}).$

II. Az $(1 - \text{id})^{-2}$ függvény sorfejtését a hatványsorok **összegfüggvényének differenciálhatósága** alapján is megkaphatjuk :
 $|x| < 1$ esetén $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \cdot x^n \quad (|x| \geq 1 \text{ -re a sor divergens!}).$

III. Felhasználva, hogy $|x| < 1$ esetén $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, a **Cauchy szorzat** alkalmazásával is meghatározhatjuk az $\frac{1}{(1-\text{id})^2}$ függvény 0 hely körüli hatványsorba fejtését (minden hatványsor abszolút konvergens a konv. intervallum belsejében!) :

$$\forall x \in (-1, 1) \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n x^k \cdot x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(x^n \cdot \sum_{k=0}^n 1 \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \cdot x^n.$$

2. Határozzuk meg a $\sum (n \cdot \text{id}^n)$ hatványsor összegfüggvényét !

a.) A hatv.sor **konvergenciasugara**, $R = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|n|}} = 1$, s mivel a sor a ± 1 helyeken divergens, a **konv.intervallum** $(-1, 1)$.

b.) Ha $x \in (-1, 1)$, akkor $f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot x^n = x \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot x^{n-1} = x \cdot \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \right)' = x \cdot \left(\frac{x}{1-x} \right)' = x \cdot \frac{(1-x) - (-x)}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}.$

A $\sum (n \cdot \text{id}^n)$ hatványsor **összegfüggvénye** tehát : az $\frac{\text{id}}{(1-\text{id})^2}$ függvénynek a $(-1, 1)$ intervallumra való leszűkítése.

Megj.: Az **összegfüggvényt** az 1. feladatban tárgyalt $(1 - \text{id})^{-2}$ fgv. sorfejtése alapján azonnal is megkaphattuk volna, felhasználva, hogy $\forall x \in (-1, 1) \quad \frac{x}{(1-x)^2} = x \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \cdot x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \cdot x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot x^n.$

3. Határozzuk meg a $\sum (n^2 \cdot \text{id}^n)$ hatványsor összegfüggvényét !

a.) A hatv.sor **konvergenciasugara**, $R = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|n^2|}} = 1$, a sor a ± 1 helyeken divergens, így a **konv. intervallum** $(-1, 1)$.

b.) Legyen $x \in (-1, 1)$, $f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \cdot x^n$, $g(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot (n \cdot x^{n-1})$, $h(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot x^n$. Ekkor

$$h(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{és} \quad g(x) = h'(x) \quad \text{miatt az} \quad \text{összegfüggvényre :} \quad f(x) = x \cdot g(x) = x \cdot \frac{(1-x)^2 + 2x \cdot (1-x)}{(1-x)^4} = \frac{x \cdot (1+x)}{(1-x)^3}.$$

4. Határozzuk meg a $\sum \left(\frac{1}{n} \cdot \text{id}^n \right)$ hatványsor összegfüggvényét !

A hatványsor **konvergenciasugara**, $R = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|1/n|}} = 1$, a sor a -1 helyen konvergens, az 1 helyen divergens, így a **konvergenciaintervallum** $[-1, 1)$, melynek belső pontjaiban az f összegfüggvény deriváltja : $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$

Ebből, a 0 helyen vett 0 sorösszeg és a -1 -beli folytonosság alapján, a hatványsor **összegfüggvényére** : $f(x) = -\ln(1-x).$

5. Határozzuk meg az $x \mapsto \ln(1+x)$ függvény 0 középpontú Taylor sorát és vizsgáljuk meg ennek konvergenciáját !

$\forall x \in (-1, 1) \quad \ln'(1+x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot x^n$. A jobboldali hatványsor a $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{\text{id}^{n+1}}{n+1}$ hatványsor derivált sora (konvergenciasugaruk 1), így $\forall x \in (-1, 1)$ a $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = \ln'(1+x)$ egyenlőséget kapjuk (összegfüggvény deriváltja).

Ebből: $\forall x \in (-1, 1) \quad \ln(1+x) = c + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$, s mivel $\ln(1+0) = 0$, $c = 0$. Figyelembevéve, hogy a sor $x = 1$ esetén is

konvergens, s hogy itt Abel tétele szerint a sorösszeg $\ln 2$, kapjuk: $\forall x \in (-1, 1] \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n$.

A Taylor sor tehát a $(-1, 1]$ intervallumon előállítja a függvényt. (A Taylor sor összegfüggvénye: a függvény leszűkítése $(-1, 1]$ -re.)

Megj.: Ha tehát $-1 < x-1 \leq 1$, azaz $x \in (0, 2]$, akkor $\ln(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot (x-1)^n$, az \ln fgv. 1 körüli sorbafejtése.

Ebből pedig, ha $R \in \mathbf{R}^+$ és $\frac{x}{R} \in (0, 2]$, azaz $x \in (0, 2R]$, akkor $\ln\left(\frac{x}{R}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \left(\frac{x}{R} - 1\right)^n$, melyből kapjuk:

$\forall x \in (0, 2R] \quad \ln(x) = \ln(R) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot R^n} \cdot (x-R)^n$, az \ln függvény R körüli sorbafejtése. (R kp.ú Taylor sorba fejtés.)

6. Határozzuk meg az \arctg függvény 0 középpontú Taylor sorát és vizsgáljuk meg ennek konvergenciáját !

$\arctg'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, melyre ha $|x| < 1$, akkor $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}$. A jobboldali hatványsor a $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{\text{id}^{2n+1}}{2n+1}$ hatv.sor derivált sora (konvergenciasugaruk 1), így $\forall x \in (-1, 1) \quad \arctg(x) = c + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, s mivel $\arctg(0) = 0$, $c = 0$. A sor $x = \pm 1$ esetén is konvergens (Leibniz kritérium), s Abel tétele miatt itt a sorösszegek: $\arctg(1) = \pi/4$, $\arctg(-1) = -\pi/4$.
 $\Rightarrow \forall x \in [-1, 1] \quad \arctg(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. A Taylor sor összegfüggvénye tehát az $\arctg|_{[-1,1]}$ függvény.

7. Határozzuk meg az area th függvény 0 középpontú Taylor sorát és vizsgáljuk meg ennek konvergenciáját !

$\forall x \in (-1, 1) \quad \text{area th}'(x) = \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$. A jobboldali hatványsor a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{id}^{2n+1}}{2n+1}$ hatv.sor derivált sora (konv.sugaruk 1), így $\forall x \in (-1, 1) \quad \text{area th}(x) = c + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, s mivel $\text{area th}(0) = 0$, $c = 0$. $\Rightarrow \forall x \in (-1, 1) \quad \text{area th}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

A Taylor sor tehát a teljes értelmezési tartományon előállítja a függvényt. (A Taylor sor összegfüggvénye maga a függvény.)

8. Határozzuk meg az alábbi $\sum c_n \cdot (\text{id}-u)^n$ hatványsorok I konvergenciaintervallumait !

a.) $\sum (n^p \cdot \text{id}^n)$, $p \in \mathbf{R}^+$: $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} = \lim (\sqrt[n]{n})^p = 1$, így a konv.sugár 1. A ± 1 helyen divergens a sor $\Rightarrow I = (-1, 1)$.

b.) $\sum ((1 + \frac{1}{n})^{-n^2} \cdot \text{id}^n)$: $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} = \lim (1 + \frac{1}{n})^{-n} = \frac{1}{e}$, így a konv.sugár e . A $\pm e$ helyen divergens a sor $\Rightarrow I = (-e, e)$.

c.) $\sum (\frac{1}{2^n} \cdot (\text{id}-2)^{n^2})$: $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} = \lim \sqrt[n]{2^{-n}} = 1$, így a konv.sugár 1. Az 1 és 3 helyen konvergens a sor $\Rightarrow I = [1, 3]$.

d.) $\sum (\frac{3^n + (-2)^n}{n^2} \cdot (\text{id}+1)^n)$: $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} = \lim \frac{3 \cdot \sqrt[n]{1+(-2/3)^n}}{\sqrt[n]{n^2}} = 3$, így a k.s. $\frac{1}{3}$. A $-\frac{4}{3}$, $-\frac{2}{3}$ helyen konv.sor $\Rightarrow I = [-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}]$.

e.) $\sum (n! \cdot (\text{id}-7)^n)$: $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} = \lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$, így a konv.sugár 0. $\Rightarrow I = [7, 7]$ elfajuló intervallum ($= \{7\}$).