I. ZÁRTHELYI A. csoport, **MEGOLDÁSOK** (2003. november 10.)

1. Állítsuk elő az $f(x) := x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ polinomfüggvény -1 középpontú Taylor-sorát ! Mi lesz ennek összegfüggvénye ?

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 8x - 6$, $f''(x) = 12x^2 - 12x + 8$, $f'''(x) = 24x - 12$, $f^{(4)}(x) = 24$ és $f^{(n)}(x) = 0$ $(n > 4)$, így $\forall x \in \mathbf{R}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-1)}{n!} \cdot (x+1)^n = 21 - \tfrac{24}{1!} \cdot (x+1) + \tfrac{32}{2!} \cdot (x+1)^2 - \tfrac{36}{3!} \cdot (x+1)^3 + \tfrac{24}{4!} \cdot (x+1)^4 = 21 - 24(x+1) + 16(x+1)^2 - 6(x+1)^3 + (x+1)^4 = f(x).$$

2. Fejtsük hatványsorba az $f(x) := \sqrt{8 + 8x + 4x^2}$ hozzárendeléssel megadott függvényt !

$f(x) = \sqrt{8 + 8x + 4x^2} = 2 \cdot \sqrt{1 + (1 + 2x + x^2)} = 2 \cdot \sqrt{1 + (x+1)^2} = 2 \cdot \left(1 + (x+1)^2\right)^{1/2}$, emiatt a Binomiális tételt alkalmazzuk :

Ha $n > 1$, akkor $\binom{\frac{1}{2}}{n} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} - 1) \cdot \ldots \cdot (\frac{1}{2} - n + 1)}{n!} = (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{(2n-3)!!}{2^n \cdot n!} = (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$ ($n = 0, 1$ -re is alkalmas képlet), így ha

$(x+1)^2 < 1$, azaz $x \in (-2, 0)$, akkor $f(x) = 2 \cdot \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \cdot \left((x+1)^2\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot 2 \cdot \dfrac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \cdot (x+1)^{2n}$ (Biz.ható: $x \in [-2, 0\,]$).

3. Határozzuk meg az $\left\{ x \in \mathbf{R} : \sum\limits_{(0)} (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{n^{100}}{2^n + (-1)^n + 5^n} \cdot (x-1)^n \text{ sor konvergens} \right\}$ halmazt !

$\limsup \sqrt[n]{|c_n|} = \limsup \sqrt[n]{\dfrac{n^{100}}{2^n + (-1)^n + 5^n}} = \lim \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{(\sqrt[n]{n}\,)^{100}}{\sqrt[n]{(\frac{2}{5})^n + (-\frac{1}{5})^n + 1}} = \dfrac{1}{5}$ $\Rightarrow$ $R = 5$, a konvergenciaintervallum végpontjaiban

a sor nem konvergens, u.i. itt $|c_n| = \dfrac{n^{100}}{2^n + (-1)^n + 5^n} \cdot 5^n \to +\infty$, így a konvergenciaintervallum : $I = (-4, 6\,)$.

4. Állítsuk elő a $\sum\limits_{(0)} (n+1) \cdot (x-2)^n$ és a $\sum\limits_{(0)} (x-2)^n$ hatványsorok Cauchy - szorzatát és ennek összegfüggvényét !

Ha $|x - 2| < 1$, akkor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot (x-2)^n = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} (x-2)^{n+1} \right)' = \left(\dfrac{x-2}{1-(x-2)} \right)' = \left(\dfrac{x-2}{3-x} \right)' = \dfrac{(3-x) + (x-2)}{(3-x)^2} = \dfrac{1}{(3-x)^2}$ és

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (x-2)^n = = \dfrac{1}{1 - (x-2)} = \dfrac{1}{3-x}$, így a Cauchy - szorzatra: $\forall x \in (1, 3)$ $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot (x-2)^n \right) \cdot \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} (x-2)^n \right) =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (k+1) \cdot (x-2)^k \cdot (x-2)^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((x-2)^n \cdot \sum_{k=0}^{n} (k+1) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} \cdot (x-2)^n = \frac{1}{(3-x)^2} \cdot \frac{1}{3-x} = \frac{1}{(3-x)^3} .$$

5. Határozzuk meg a $\sum\limits_{(1)} \dfrac{1}{n \cdot 3^n} \cdot x^{n+3}$ hatványsor összegfüggvényét !

a.) A $\sum\limits_{(1)} \dfrac{1}{n \cdot 3^n} \cdot x^n$ (és deriváltsorának) konvergenciasugara, R$= \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}} = \limsup \sqrt[n]{n \cdot 3^n} = 3$, így $\forall x \in (-3, 3\,)$

$\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot 3^n} \cdot x^n \right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n} \cdot x^{n-1} = \dfrac{1}{3} \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{x}{3} \right)^{n-1} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{x}{3}} = \dfrac{1}{3-x} = \left(-\ln(3-x)\right)'$ $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot 3^n} \cdot x^n = c - \ln(3-x)$,

$c = \ln 3$ ($x = 0$ helyettesítésből). A sor $x = -3$ -ra is konvergens, így kapjuk **:** $\forall x \in [-3, 3\,)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot 3^n} \cdot x^{n+3} = x^3 \cdot \ln \dfrac{3}{3-x}$.

b.) $\ln(1+x)$ sorfejtéséből **:** Ha $-\frac{x}{3} \in (-1, 1]$, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot 3^n} \cdot x^{n+3} = -x^3 \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot (-\dfrac{x}{3})^n = -x^3 \cdot \ln(1 - \dfrac{x}{3}) = x^3 \cdot \ln \dfrac{3}{3-x}$.

6. Legfeljebb mekkora hibát követhetünk el, amikor a $(-1, 1)$ intervallumon az $x \mapsto \cos x$ függvényt a 0 körüli negyedik Taylor - polinomjával közelítjük ? Adjuk meg ezt a polinomot ! Becsüljük meg a hibát az $x = 0.01$ helyre vonatkozóan !

$T_{0,4}(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$ és $\forall x \in (-1, 1)$ $|\cos x - T_{0,4}(x)| = |\cos x - T_{0,5}(x)| = \left| \dfrac{\cos^{(6)}(\xi)}{6!} \cdot x^6 \right| < \dfrac{1}{6!} \cdot 1^6 < \dfrac{1}{6!}$; $x = 10^{-2}$ -ra $< \dfrac{1}{6!} \cdot 10^{-12}$.