45.k feladat: **Függvényvizsgálat.**

1. $f(x) := x \cdot \operatorname{arctg} x$, $D(f) = \mathbf{R}$. Nullhelyek: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $(\ \forall x \in D(f) \setminus \{0\}\ \ f(x) > 0\ )$,

Határértékek: $D(f)$ azon torl. pontjaiban, ahol f nem folytonos, vagy nem értelmezett: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

2. Monotonitás, szélsőértékek: $f'(x) = \operatorname{arctg} x + \dfrac{x}{1+x^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $f'(x) < 0$, ha $x < 0$ és $f'(x) > 0$, ha $x > 0$

$\Rightarrow$ f szig. mon. fogyó a $(-\infty, 0)$ intervallumon és szig. mon. növő a $(0, +\infty)$ intervallumon, $\Rightarrow$ $f(0) = 0$ glob.minimum.

3. Értékkészlet: f monoton szakaszainak és határértékeinek ismeretében: $R(f) = [\,0, +\infty\,)$.

4. Konvexitás, konkávitás, inflexió: $f''(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2\,(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow$

$\forall\, x \in D(f)$ $f''(x) > 0$, tehát f szig. konvex függvény, inflexió nincsen.

5. Aszimptoták: f-nek van aszimptotája, ha $\exists \lim\limits_{x \to \pm\infty} (\, f(x) - m \cdot x - b\,) = 0 \Rightarrow m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$.

Itt $m_1 = \lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$, $m_2 = \lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, és $b_{2,1} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (x \cdot \operatorname{arctg} x \mp \frac{\pi}{2} x) =$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} x \cdot \frac{\operatorname{arctg} x \mp \frac{\pi}{2}}{\sin(\operatorname{arctg} x \mp \frac{\pi}{2})} \cdot \sin(\operatorname{arctg} x \mp \tfrac{\pi}{2}) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\operatorname{arctg} x \mp \frac{\pi}{2}}{\sin(\operatorname{arctg} x \mp \frac{\pi}{2})} \cdot \lim_{x \to \pm\infty} \mp x \cdot \cos(\operatorname{arctg} x) = 1 \cdot \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\mp x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)}} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\mp 1}{\operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} = -1,$$

tehát a $-\infty$-beli aszimptota az $x \mapsto -\dfrac{\pi}{2} \cdot x - 1$ egyenes, a $+\infty$-beli aszimptota az $x \mapsto \dfrac{\pi}{2} \cdot x - 1$ egyenes.