5. Gyakorlat : (2003. okt.13. hétfő, okt.15. szerda)

1. Bizonyítsuk be, hogy az arcsin függvény 0 középpontú Taylor sora az $x=1$ és $x=-1$ helyeken is konvergens !

A 3. Gyakorlat 1. feladatában bizonyítottuk, hogy $\forall x \in (-1,1)\quad \arcsin(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!}\cdot x^{2n+1}$ (def.: $(-1)!!:=1$).

A sor az $x=\pm 1$ helyeken is konvergens, ezt bizonyítandó megmutatjuk, hogy a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!}$ sor konvergens :

$$\forall n\in\mathbf{N}\quad n^2-1<n^2 \;\Rightarrow\; \frac{n-1}{n}<\frac{n}{n+1} \;\Rightarrow\; \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \;\Rightarrow\; \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2<\frac{1}{2n+1} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!}<\frac{1}{(2n+1)\cdot\sqrt{2n+1}}<\frac{1}{n^{3/2}},$$ így a Majoráns kritérium szerint (u.i. a $\sum\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ sor konvergens !)

az arcsin fgv. 0 kp-ú Taylor sora is konvergens az $1,-1$ helyeken. ($\Rightarrow\ \forall x\in[-1,1]\quad \arcsin(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!}\cdot x^{2n+1}$.)

2. Határozzuk meg az areash függvény 0 középpontú Taylor sorát és ennek összegfüggvényét !

$\mathrm{arsh}'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, ezért a binomiális tételt alkalmazzuk: $\forall x\in(-1,1)\quad (1+x)^{-\frac{1}{2}}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\cdot x^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$

$\Rightarrow\ \forall x\in(-1,1)\quad x^2\in(-1,1)$ miatt $\mathrm{arsh}'(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot x^{2n}$, s így $\mathrm{arsh}(x)=c+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!}\cdot x^{2n+1}$,

melyből $\mathrm{arsh}(0)=0$ miatt $c=0$. A sor $x=1$ és $x=-1$ -beli konvergenciája a sor abszolút konvergenciájából következik, mely a Majoráns kritériummal bizonyítható, (ld. 1.feladat). $\Rightarrow\ \forall x\in[-1,1]\quad \mathrm{arsh}(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!}\cdot x^{2n+1}$. (def.: $(-1)!!:=1$).

Ez tehát az arsh fgv. 0 középpontú Taylor sora, melynek összegfüggvénye az arsh -nak a $[-1,1]$ intervallumra való leszűkítése.

3. Határozzuk meg az ln függvény 1 középpontú Taylor sorát és ennek összegfüggvényét !

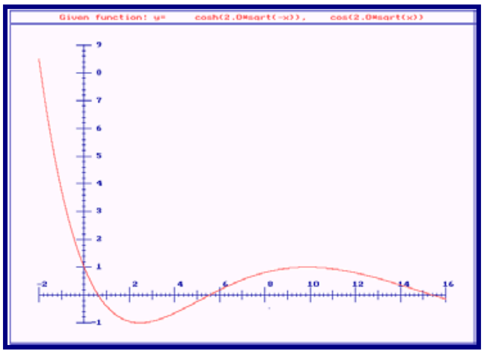
Először a függvény deriváltjának Taylor sorát vizsgáljuk: a geometriai sorok összegét felhasználva, ha $|x-1|<1$, akkor

$\ln'(x)=\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{1+(x-1)}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot(x-1)^n$, és $|x-1|>1$ esetén a jobboldali sor divergens. Felhasználva, hogy a hatv.sorok összegfv.-e a konv.intervallum belsejében differenciálható, $\forall x\in(0,2)\quad \ln(x)=c+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n+1}\cdot(x-1)^{n+1}$, s mivel $\ln(1)=0$,

így a konstans, $c=0$. Az $x=2$ helyen is konvergens a sor (Leibniz tétel), így Abel tétele szerint itt a sor összege $\ln 2$. Tehát

$\forall x\in(0,2]\quad \ln(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}\cdot(x-1)^n$, a ln fgv. 1 kp-ú Taylor sora, az összegfgv. a ln -nak $(0,2]$ -re való leszűkítése.

4. Határozzuk meg a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{4^n}{(2n)!}\cdot \mathrm{id}^n$ hatványsor összegfüggvényét !



A cos és a cosh függvények Taylor sorait felhasználva,

$$\forall x\in\mathbf{R}_0^+\quad \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{4^n}{(2n)!}\cdot x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\left(2\sqrt{x}\right)^{2n}=\cos\left(2\sqrt{x}\right),$$

$$\forall x\in\mathbf{R}^-\quad \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{4^n}{(2n)!}\cdot x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}\cdot\left(2\sqrt{-x}\right)^{2n}=\cosh\left(2\sqrt{-x}\right).$$

5. Állítsuk elő az $\mathbf{R}$ -en értelmezett, $f(x):=\sqrt{x^2-2x+2}$ értékadással megadott függvény valamely leszűkítését hatványsor összegfüggvényeként ! A binomiális tétel szerint ($\alpha=1/2$, a végpontokban a Majoráns kritériumot alkalmazva)

$\dfrac{(2n-3)!!}{(2n)!!}<\dfrac{1}{(2n-1)\cdot\sqrt{2n+1}}<\dfrac{1}{n^{3/2}}$, így $\forall x\in[0,2]\quad f(x)=\sqrt{1+(x-1)^2}=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\cdot(x-1)^{2n}$.