TAYLOR POLINOMOK, TAYLOR-FORMULA, TAYLOR SOROK, HATVÁNYSOROK.

1. Irjuk fel az f függvény 0 helyhez tartozó megadott n -dik Taylor polinomját, ha a hozzárendelés :

   a. $f(x) := \cos x$, $f(x) := \sin x$, $f(x) := \operatorname{tg} x$, $f(x) := \mathrm{e}^x$, $f(x) := \operatorname{ch} x$, $f(x) := \operatorname{sh} x$, $f(x) := \ln(1+x)$, $n = 10$,

   b. $f(x) := \cosh x + \cos x$, $n = 8$,

   c. $f(x) := \sqrt[5]{\mathrm{e}^5 + x}$, $n = 2$,

   d. $f(x) := 1 - \cos x$, $n = 2$ és $n = 4$,

   e. $f(x) := \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$, ha $x \neq 0$ és $f(0) = 1$, $n = 1$,

   f. $f(x) := \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$, ha $x \neq 0$ és $f(0) = 1$, $n = 7$,

   g. $f(x) := \sin(\sin x)$, $n = 3$.

2. Adjuk meg a $p(x) := -2x^3 + 5x^2 + 3x + 1$ polinomfüggvényt $(x+1)$ hatványainak összegeként !

3. Legfeljebb mekkora hibát követhetünk el, amikor az $f(x)$ értéket a fgv. 0 helyhez tartozó harmadik Taylor polinomjának x –beli helyettesítési értékével közelítjük, ha $x \in (-0.5, 0.5)$ és a hozzárendelés :

   $f(x) := \cos x$, $f(x) := \sin x$, $f(x) := \operatorname{tg} x$, $f(x) := \mathrm{e}^x$, $f(x) := \operatorname{ch} x$, $f(x) := \operatorname{sh} x$, $f(x) := \sqrt{1+x}$?

4. Határozzuk meg azon $x \in \mathbf{R}$ értékek halmazát, melyekre a $\cos x$ érték 0.0001 pontossággal közelíthető a $p(x) := 1 - 0.5x^2$ polinommal ?

5. Kizárólag csak az összeadás, kivonás, szorzás és osztás műveletek alkalmazásával számítsuk ki :

   a. e értékét 10^{-9} pontossággal,

   b. $\sin 1^\circ$ értékét 10^{-8} pontossággal,

   c. $\cos 9^\circ$ értékét 10^{-5} pontossággal,

   d. $\sqrt{5}$ értékét 10^{-4} pontossággal.

6. Határozzuk meg az f függvény 0 helyhez tartozó Taylor sorát, és adjuk meg ennek összegfüggvényét, ha a hozzárendelés :

   a. $f(x) := \cos x$, $f(x) := \sin x$, $f(x) := \operatorname{tg} x$, $f(x) := 2^x$, $f(x) := \operatorname{ch} x$, $f(x) := \operatorname{sh} x$, $f(x) := \sqrt{1+x}$,

   b. $f(x) := \sin^2 x$,

   c. $f(x) := \cos^2 x$,

   d. $f(x) := \mathrm{e}^{-x^2}$,

   e. $f(x) := \mathrm{e}^{-1/x^2}$,

   f. $f(x) := \dfrac{x^{10}}{1-x}$,

   g. $f(x) := \dfrac{1}{(1-x)^2}$,

   h. $f(x) := \dfrac{x^2}{(1-x)^2}$,

   i. $f(x) := \dfrac{x}{1+x^3}$,

   j. $f(x) := \dfrac{1}{1+x+x^2}$,

   k. $f(x) := \ln\sqrt{(1+x)(1-x)}$.

7. Határozzuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát :

   a. $\sum(n^p \operatorname{id}^n)$, $p \in \mathbf{R}$,

   b. $\sum(a^{n^2} \operatorname{id}^n)$, $a \in \mathbf{R}$,

   c. $\sum(\frac{3^n + (-2)^n}{n} (\operatorname{id}+1)^n)$,

   d. $\sum((1+\frac{1}{n})^{n^2} \operatorname{id}^n)$,

   e. $\sum(\dfrac{\operatorname{id}^n}{a^n + b^n})$, $a, b \in \mathbf{R}^+$,

   f. $\sum(\dfrac{\operatorname{id}^n}{a^{\sqrt{n}}})$, $a \in \mathbf{R}^+$,

   g. $\sum(\frac{(-1)^n}{n!} (\frac{n}{\mathrm{e}})^n \operatorname{id}^n)$,

   h. $\sum(\dfrac{\operatorname{id}^{n^2}}{2^n})$.

8. Állítsuk elő az $\left.\dfrac{1}{\operatorname{id}}\right|_{(1,3)}$ függvényt 2 körüli hatványsor összegfüggvényeként !

9. Bizonyítsuk be, hogy $\forall R \in \mathbf{R}^+$ és $\forall x \in (0, 2R]$ $\ln x = \ln R + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n \cdot R^n} \cdot (x-R)^n$!

10. Van-e olyan végtelen sokszor differenciálható $\mathbf{R}$ -en értelmezett valós f függvény, amelynek 0 körüli Taylor sora az egész $\mathbf{R}$ -en konvergens, és amelyre $\{ x \in \mathbf{R} : f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \} = [-1, 1]$?

11. Adjunk példát olyan hatványsorra, melynek konvergenciahalmaza az egyelemű $\{ \mathrm{e} \}$ halmaz !