SOROZATOK felső és alsó határértéke (vázlatos bizonyításokkal)

Definíció: Azt mondjuk, hogy $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}$ a (c_n) sorozat torlódási pontja, ha a sorozatnak van α-hoz tartó (c_{n_k}) részsorozata: $\boxed{c_{n_k} \to \alpha \quad (k \to +\infty)}$

Állítás: $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}$ a (c_n) sorozat torlódási pontja pontosan akkor, ha α-nak minden környezetében a (c_n) sorozatnak végtelen sok tagja van.

Bizonyítás: **I.** $\Rightarrow$: Legyen (c_{n_k}) α-hoz tartó részsorozat. α-nak bármely környezetén kívül ezen (c_{n_k}) részsorozatnak csak véges sok tagja lehet, így végtelen sok tag (melyek egyben a (c_n) sorozatnak is tagjai) a környezetnek eleme.

II. $\Leftarrow$: Mivel $\forall\, \varepsilon \in \mathbf{R}^+$ az $\{\, n \in \mathbf{N} : \ c_n \in B(\alpha,\varepsilon) \,\}$ halmaz végtelen, az alábbi rekurzióval definiálhatunk egy α-hoz tartó (c_{n_k}) részsorozatot: **1.** $c_{n_1} := c_1$; **2.** Ha c_{n_k} már definiált tag, akkor $c_{n_{k+1}}$-t válasszuk úgy, hogy $n_{k+1} \in \{ n \in \mathbf{N} : \ c_n \in B(\alpha, \frac{1}{k+1}) \}$ és $n_{k+1} > n_k$ teljesüljenek. Így (n_k) valóban indexsorozat, és a részsorozat $k>1$ indexű tagjaira: $c_{n_k} \in B(\alpha, \frac{1}{k})$, s emiatt $c_{n_k} \to \alpha$, hiszen ha $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$, akkor $\forall\, k > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ $\quad c_{n_k} \in B(\alpha, \frac{1}{k}) \subset B(\alpha,\varepsilon)$ $\quad (\frac{1}{k} < \varepsilon$ miatt). ☺

Megjegyzés: Mivel minden sorozatnak van monoton részsorozata, így minden korlátos sorozatnak van legalább egy valós torlódási pontja (Bolzano-Weierstrass tétel), a nem korlátos sorozatok torlódási pontjai között pedig vagy a $+\infty$ (ha felülről nem korlátos) vagy a $-\infty$ (ha alulról nem korlátos) szerepel. (Egy sorozat torlódási pontjainak halmaza tehát sosem az üres halmaz !)

Állítás: Bármely (c_n) sorozat torlódási pontjainak halmazában van legnagyobb és legkisebb elem.

Bizonyítás: Legyen T a (c_n) sorozat torlódási pontjainak halmaza, $\alpha := \inf T$, $\beta := \sup T$. Azt kell bizonyítani, hogy α és β maguk is torlódási pontjai a sorozatnak, vagyis bármely környezetükben a sorozatnak végtelen sok tagja van. β-ra bizonyítjuk (α-ra a bizonyítás hasonló) : T.f.h. $\beta \notin T$ $\Rightarrow$ $\exists\, \varepsilon_1 \in \mathbf{R}^+$ $B(\beta,\varepsilon_1)$ -ben legfeljebb véges sok tagja van a (c_n) sorozatnak. Ez ellentmondás, hiszen mivel β a T halmaz szuprémuma, $\exists\, \tau \in T$ $\ \tau < \beta$ és $\tau \in B(\beta,\varepsilon_1)$, így ha $\varepsilon_2 \in \mathbf{R}^+$ és $B(\tau,\varepsilon_2) \subset B(\beta,\varepsilon_1)$, akkor a $B(\tau,\varepsilon_2)$ -ben lévő végtelen sok tag (τ torlódási pontja a (c_n) sorozatnak !) a $B(\beta,\varepsilon_1)$ -nek is eleme. ☺

Definíció: A (c_n) sorozat legnagyobb torlódási pontját a sorozat felső határértéke–nek, vagy limesz szuperiorja-nak nevezzük és $\boxed{\limsup\,(c_n)}$ -nel **jelöljük**.

Definíció: A (c_n) sorozat legkisebb torlódási pontját a sorozat alsó határértéke –nek, vagy limesz inferiorja -nak nevezzük és $\boxed{\liminf\,(c_n)}$ -nel **jelöljük**.

Megjegyzés: A (c_n) sorozatnak pontosan akkor létezik határértéke, ha $\boxed{\liminf\,(c_n)} = \boxed{\limsup\,(c_n)}$ $\quad \boxed{(= \lim\,(c_n)\ )}$

Példák: **1.** $c_n := \dfrac{(1-(-1)^n)\cdot 2^n + 1}{2^n+3}$; $T = \{\, 0, 2 \,\}$ ((c_n) torlódási pontjainak halmaza); $\limsup\,(c_n) = 2$, $\liminf\,(c_n) = 0$.

2. $c_n := \cos\,(\frac{n\,\pi}{3})^n$; $\quad T = \{\, -1, 0, 1 \,\}$; $\quad \limsup\,(c_n) = 1$, $\quad \liminf\,(c_n) = -1$.

3. $c_n := \dfrac{2n^2}{7} - \left[\dfrac{2n^2}{7}\right]$; $\quad T = \{\, 0, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7} \}$; $\quad \limsup\,(c_n) = \frac{4}{7}$, $\quad \liminf\,(c_n) = 0$.

4. Legyen (c_n) olyan sorozat, melynek tagjai racionális számok és minden racionális szám legalább egyszer szerepeljen a tagok között; $\quad T = \overline{\mathbf{R}}$; $\quad \limsup\,(c_n) = +\infty$, $\quad \liminf\,(c_n) = -\infty$.