

6. Emlékeztető : (Sorok Cauchy szorzata, példák)

Ha a $\sum (a_n)$ sor **abszolút konvergens**, a $\sum (b_n)$ sor **konvergens**, akkor a két sor u.n. **Cauchy szorzata**, azaz a $\sum \left(\sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k} \right)$ sor is **konvergens**, és összege : $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right)$.

Tehát két konvergens sor Cauchy szorzatának konvergenciájához **elegendő feltétel** az egyik sor abszolút konvergenciája.

Példák :

$$1. \quad \forall x, y \in \mathbf{R} \quad e^x \cdot e^y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot x^k \cdot y^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x+y)^n = e^{x+y}.$$

Megj.: A fenti egyenlőségek változatlanul érvényesek komplex sorfejtések esetén is ! $(e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!})$

$$2. \quad \forall x, y \in \mathbf{C} \quad \sin x \cdot \cos y = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{y^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^{k+(n-k)} \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot \frac{y^{2(n-k)}}{(2(n-k))!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(2n+1)!}{(2k+1)! \cdot ((2n+1)-(2k+1))!} \cdot x^{2k+1} \cdot y^{(2n+1)-(2k+1)},$$

$$\sin y \cdot \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(2n+1)!}{(2k+1)! \cdot ((2n+1)-(2k+1))!} \cdot y^{2k+1} \cdot x^{(2n+1)-(2k+1)}, \quad \text{majd ezeket összeadva (és átindexelve):}$$

$$\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \left(\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} \cdot x^{2k+1} \cdot y^{2n-2k} + \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2n-2k} \cdot x^{2n-2k} \cdot y^{2k+1} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \left(\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} \cdot x^{2k+1} \cdot y^{2n-2k} + \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} \cdot x^{2k} \cdot y^{2n+1-2k} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \cdot x^k \cdot y^{2n+1-k} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)!} \cdot (x+y)^{2n+1} = \sin(x+y).$$

Megj.: A trig. addíciós azonosságokat a valós esetre egyszerűbben megkaphatjuk, ha az u.n. Euler formulát alkalmazzuk: $\forall z \in \mathbf{C}$

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot (i \cdot z)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!} + i \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos z + i \cdot \sin z, \quad \text{s így } \forall x, y \in \mathbf{R} \quad \cos(x+y) + i \cdot \sin(x+y) =$$

$$= e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy} = (\cos x + i \cdot \sin x) \cdot (\cos y + i \cdot \sin y) = (\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y) + i \cdot (\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y).$$

A komplex esetre is egyszerűbb a bizonyítás, ha figyelembe vesszük: $\cos z = \frac{1}{2} \cdot (e^{iz} + e^{-iz})$ és $\sin z = \frac{1}{2} \cdot (e^{iz} - e^{-iz})$, így pl.:

$$\forall x, y \in \mathbf{C} \quad \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y = \frac{1}{2} \cdot (e^{ix} - e^{-ix}) \cdot \frac{1}{2} \cdot (e^{iy} + e^{-iy}) + \frac{1}{2} \cdot (e^{ix} + e^{-ix}) \cdot \frac{1}{2} \cdot (e^{iy} - e^{-iy}) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (e^{ix} \cdot e^{iy} - e^{-ix} \cdot e^{-iy} + e^{ix} \cdot e^{-iy} - e^{-ix} \cdot e^{iy}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (e^{ix} \cdot e^{iy} - e^{-ix} \cdot e^{-iy} - e^{ix} \cdot e^{-iy} + e^{-ix} \cdot e^{iy}) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (e^{ix} \cdot e^{iy} - e^{-ix} \cdot e^{-iy}) = \frac{1}{2} \cdot (e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}) = \sin(x+y).$$

$$3. \quad \forall x \in \mathbf{C} \quad \sin^2 x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^{k+(n-k)} \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot \frac{x^{2(n-k)+1}}{(2(n-k)+1)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(2n+2)!}{(2k+1)! \cdot (2n+2-(2k+1))!} = * \quad \left(\text{felhasználva, hogy } 0 = (1-1)^{2n+2} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{2n+2}{2k} - \sum_{k=0}^n \binom{2n+2}{2k+1} \right) \text{ és}$$

$$2^{2n+2} = (1+1)^{2n+2} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{2n+2}{2k} + \sum_{k=0}^n \binom{2n+2}{2k+1} \quad * = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot 2^{2n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} \cdot x^{2n}.$$

Megj.: A \sin^2 függvény hatványsorba fejtését a Cauchy szorzat alkalmazása nélkül is meghatározhatjuk :

$$\forall x \in \mathbf{C} \quad \sin^2 x = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} \cdot x^{2n}.$$