I. ZÁRTHELYI , MEGOLDÁSOK (2003. november 12.)

0. Adjuk meg az $f(x) := \dfrac{1}{(1+x)^3}$ értékadással megadott függvény 0 középpontú Taylor - sorát,

   1. **a Taylor - sor definíciójának alkalmazásával,**
   2. **a Binomiális tétel alkalmazásával,**
   3. **a hatványsorok összegfüggvényének differenciálhatóságáról szóló tétel alkalmazásával,**
   4. **Cauchy - szorzat alkalmazásával,**

   adjuk meg a sor konvergenciaintervallumát, összegfüggvényét !

1. $f'(x) = -3\cdot(1+x)^{-4}$, $f''(x) = -3\cdot(-4)\cdot(1+x)^{-5}$, …, $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{1}{2}\cdot(n+2)!\cdot(1+x)^{-(n+3)}$ (telj. indukcióval biz.ható!),

így a T.sor: $\displaystyle\sum_{(0)} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n = 1 + \sum_{(1)} \frac{(-1)^n\cdot(n+2)!}{2\cdot n!}\cdot x^n = 1 + \sum_{(1)} (-1)^n \cdot \tfrac{1}{2}\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot x^n = \sum_{(0)} (-1)^n \cdot \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\cdot x^n$.

2. Ha $n>1$, akkor $\displaystyle\binom{-3}{n} = \frac{(-3)\cdot(-4)\cdot\ldots\cdot(-3-n+1)}{n!} = (-1)^n\cdot\frac{(n+2)!}{2\cdot n!} = (-1)^n\cdot\tfrac{1}{2}\cdot(n+1)\cdot(n+2)$, ez $n=0,1$ esetére is

fennáll (a bin.együtthatók 1 ill. -3), így $\forall x\in(-1,1)$ $\displaystyle(1+x)^{-3} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{-3}{n}\cdot x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\cdot x^n$, a T.-sorfejtés.

3. $\forall x\in(-1,1)$ $\displaystyle\frac{1}{(1+x)^2} = \left(-\frac{1}{1+x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(n+1)\cdot x^n$ és emiatt

$$\frac{1}{(1+x)^3} = \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}\right)' = \left(-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(n+1)\cdot x^n\right)' = -\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot(n+1)\cdot n\cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2}\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot x^n .$$

4. $\forall x\in(-1,1)$ $\displaystyle\frac{1}{(1+x)^3} = \frac{1}{(1+x)^2}\cdot\frac{1}{1+x} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(n+1)\cdot x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot(k+1)\cdot x^k\cdot(-1)^{n-k}\cdot x^{n-k}\right) =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\cdot x^n\cdot\sum_{k=0}^{n}(k+1)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^n\cdot\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2} + (n+1)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\cdot x^n$$ a Taylor - sorfejtés.

Figyelembevéve, hogy a sor az $x=-1,\ 1$ helyeken divergens (u.i. a sor tagjai nem tartanak 0 -hoz), a 2., 3., 4. sorfejtésekből már az összegfüggvény is azonnal adódik : $(1+\mathrm{id})^{-3}\big|_{(-1,1)}$, az f függvénynek a $(-1,1)$ intervallumra való leszűkítése.

5. Határozzuk meg a $\displaystyle\sum_{(1)}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{3\cdot6\cdot9\cdot\ldots\cdot3n}\cdot(x-1)^{n+1}$ hatványsor összegfüggvényét !

$$\forall x\in\mathbf{R}\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{3\cdot6\cdot\ldots\cdot3n}\cdot(x-1)^{n+1} = -(x-1)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\left(-\frac{x-1}{3}\right)^n = (1-x)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{1-x}{3}\right)^n - 1\right) = (1-x)\cdot\left(\mathrm{e}^{\frac{1-x}{3}} - 1\right).$$

6. Határozzuk meg a $\displaystyle\sum_{(1)}(-1)^{n+1}\cdot\frac{(2n)!!}{(3n)^n}\cdot(x+2)^n$ hatványsor konvergenciasugarát ! Konvergens-e a hatványsor az $x=-7$, $x=-6$, $x=2$ és az $x=3$ helyeken ?

$$\limsup\sqrt[n]{|c_n|} = \limsup\sqrt[n]{\frac{2^n\cdot n!}{(3n)^n}} = \lim\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}} \;\Rightarrow\; R = \frac{3\mathrm{e}}{2}.$$ $-7\notin I$ és $3\notin I$ u.i. távolságuk -2 -től nagyobb R -nél.

7. Legfeljebb mekkora hibát követhetünk el, amikor a $(-1,1)$ intervallumon az $x\mapsto \mathrm{ch}\,x$ függvényt a 0 körüli negyedik Taylor - polinomjával közelítjük ? Adjuk meg ezt a polinomot ! Becsüljük meg a hibát az $x=0.001$ helyre vonatkozóan !

$$T_{0,4}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \text{ és } \forall x\in(-1,1)\ \left|\mathrm{ch}\,x - T_{0,4}(x)\right| = \left|\mathrm{ch}\,x - T_{0,5}(x)\right| = \left|\frac{\mathrm{ch}^{(6)}(\xi)}{6!}\cdot x^6\right| < \frac{\mathrm{ch}\,1}{6!}\cdot1^6 < \frac{3+1}{2\cdot6!} = \frac{1}{60}\ ;\ x=10^{-3}\text{-ra } < 2\cdot10^{-20} .$$