45.b feladat: **Függvényvizsgálat.**

1. $f(x) := \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$, $D(f) = \mathbf{R}$. Határértékek: $D(f)$ -nek azon torl. pontjaiban, ahol f nem folytonos, vagy nem értelmezett:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\frac{2}{x}}{\operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-\frac{2}{x}}{\operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1$, Nullhelyek: $f(x)=0 \iff x=2$.

2. Monotonitás, szélsőértékek: $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - (x-2)\cdot\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{2x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$, $f'(x)=0 \iff x=-\frac{1}{2}$,

$f'(x)<0$, ha $x\in(-\infty,-\frac{1}{2})$ $\Rightarrow$ f szig. mon. fogyó a $(-\infty,-\frac{1}{2})$ intervallumon,

$f'(x)>0$, ha $x\in(-\frac{1}{2},+\infty)$ $\Rightarrow$ f szig. mon. növő a $(-\frac{1}{2},+\infty)$ intervallumon, $\Rightarrow$ $f(-\frac{1}{2}) = -\sqrt{5}$ glob.minimum.

3. Értékkészlet: f monoton szakaszainak és határértékeinek ismeretében: $R(f) = [-\sqrt{5}, 1)$.

4. Konvexitás, konkávitás, inflexió: $f''(x) = \dfrac{2\cdot\sqrt{(x^2+1)^3} - (2x+1)\cdot\frac{3}{2}\cdot 2x\cdot\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^3} = \dfrac{2\cdot(x^2+1)-(2x+1)\cdot 3x}{\sqrt{(x^2+1)^5}} =$

$= \dfrac{-4x^2-3x+2}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$, $f''(x)=0 \iff x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{41}}{8}$ vagy $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{41}}{8}$, $f(x_1)\approx\ldots$, $f'(x_1)\approx\ldots$, $f(x_2)\approx\ldots$, $f'(x_2)\approx\ldots$,

(ezeket az értékeket a grafikon rajzolásához célszerű meghatározni)

$f''(x)<0$, ha $x\in(-\infty,x_1)$ vagy $x\in(x_2,+\infty)$ $\Rightarrow$ f szig. konkáv a $(-\infty,x_1)$ és az $(x_2,+\infty)$ intervallumokon,

$f''(x)>0$, ha $x\in(x_1,x_2)$ $\Rightarrow$ f szig. konvex az (x_1,x_2) intervallumon, inflexió az x_1 és x_2 pontokban.

5. Aszimptoták: f -nek van aszimptotája ($+$ vagy $-\infty$ -beli érintője: $x\mapsto m\cdot x+b$), ha $\exists \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x)-m\cdot x-b)=0$

$\Rightarrow$ $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x)-m\cdot x)$, tehát itt $m_{2,1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{x^2+1}} = 0$, $b_1 = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$,

$b_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, vagyis a $-\infty$ -beli aszimptota az $x\mapsto -1$ egyenes, a $+\infty$ -beli aszimptota az $x\mapsto +1$ egyenes.